

3 Querschnittsberechnungen

Ausführliche Erläuterungen zur Berechnung von Massivbauquerschnitten unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft geben BUSJAEGER und QUAST in [1]. Neben der analytischen und numerischen Spannungsintegration werden Iterationsalgorithmen zur Lösung der auftretenden nichtlinearen Probleme beschrieben. Aus diesem Grund soll im folgenden nur ein grundlegender Überblick über die benutzten Algorithmen gegeben werden. Insbesondere werden einige Weiterentwicklungen sowie auftretende Probleme auch im Hinblick auf eine anschließende Stabwerksberechnung erläutert.

3.1 Spannungs-Dehnungs-Linien

3.1.1 Spannungs-Dehnungs-Linie der Bewehrung

Je nach Herstellungsverfahren und Festigkeit unterscheiden sich die Spannungs-Dehnungs-Linien für die Bewehrung vor allem oberhalb der Streckgrenze. In Bild 3.1 sind einige typische Stahlkennlinien aufgeführt.

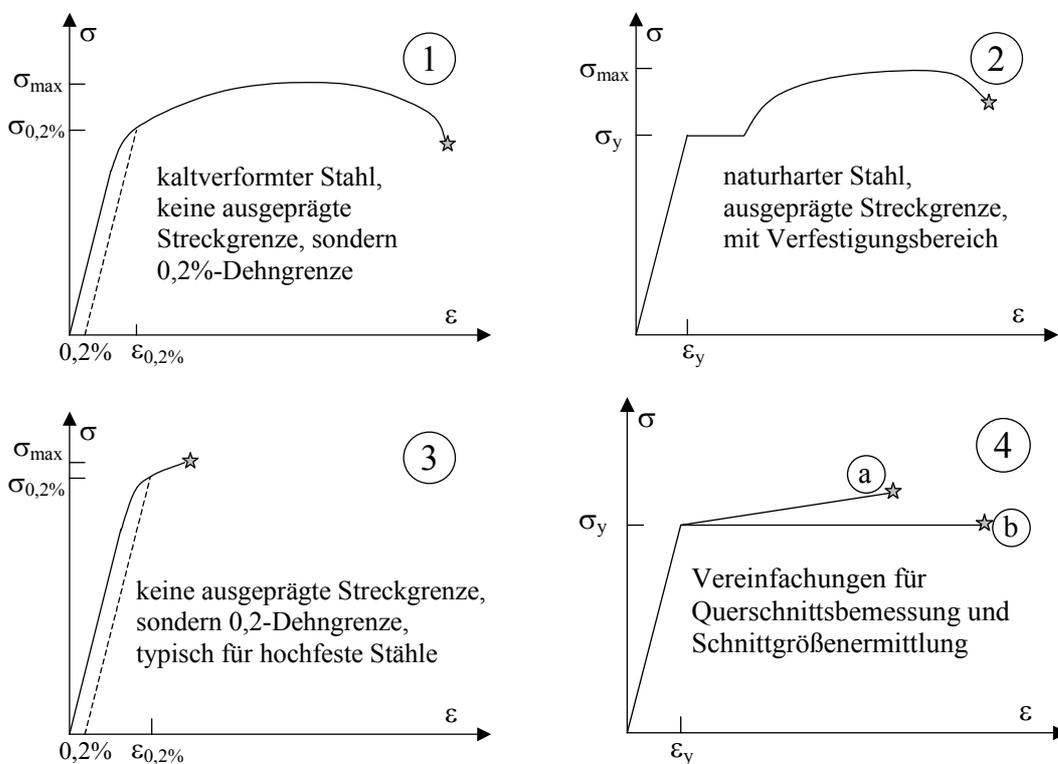


Bild 3.1 Verschiedene Spannungs-Dehnungs-Linien für Stahl im Zugversuch

Für die Bemessung und für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung ist der vereinfachte bilineare Ansatz entsprechend Linie 4 in Bild 3.1 häufig genau genug. Für eine bessere Formulierung fehlt zudem meist das Wissen über die exakte Spannungs-Dehnungs-Linie des später auf der Baustelle verwendeten Bewehrungsstahls.

Für Versuchsnachrechnungen ist jedoch der genaue Verlauf auch nach Überschreiten des linearen Bereiches wichtig, um eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu erhalten. Wegen der Vielfalt der möglichen Spannungs-Dehnungs-Linien ist die Abbildung als Polygonzug eine sinnvolle allgemeine Modellierung, evtl. ergänzt um eine Spline-Interpolation. Diese Möglichkeit wurde in das Programm INCA2 bzw. Stab2D-NL aufgenommen.

Bei einer einfachen Querschnittsberechnung ergeben sich durch die Vereinfachung mittels einer konstanten Spannung nach Überschreiten der Fließdehnung (Linie 4b) keine größeren Probleme. Zwar können während der Newton-Iteration Bereiche auftreten, in denen die Jakobi-Matrix singulär ist, es sind jedoch einfache Algorithmen verfügbar, um solche Problemstellen zu handhaben.

Wird jedoch eine nichtlineare Berechnung eines Stabtragwerks durchgeführt, dann führt die sehr geringe Biegesteifigkeit nach Überschreiten der Fließgrenze häufig zu Iterationsproblemen. Die Steifigkeit der Bewehrung und damit auch die Biege- und Dehnsteifigkeit des Stahlbetonquerschnitts werden plötzlich stark reduziert, Dehnungen und Verkrümmungen steigen an. Durch die Berechnung des Volleinspannzustands zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrix können sowohl hohe Zug- als auch Druckkräfte auftreten, die einerseits zu einer temporären Überschreitung der Querschnittstragfähigkeit führen können, andererseits aber auch eine schnelle Konvergenz verhindern.

Von Vorteil ist hier die Modellierung mit Verfestigung (Linie 4a), die auch im plastischen Bereich ausreichend große Biegesteifigkeiten liefert und damit eine schnellere Konvergenz auch nahe der Querschnittstragfähigkeit gewährleistet.

3.1.2 Spannungs-Dehnungs-Linien für den Beton im Druckbereich

Spannungs-Dehnungs-Linien für den Beton für nichtlineare Berechnungen lassen sich durch die Anfangssteigung (E-Modul im Ursprung) sowie die maximale Spannung mit zugehöriger Dehnung charakterisieren. Der Verlauf der Linie zwischen Ursprung und Scheitelpunkt lässt sich mit verschiedenen stetigen Funktionen modellieren. Die gebrochen-rationale Funktion aus dem EC2 oder der DIN 1045-1 (Funktion 1, 9.1.5, Bild 22) oder eine allgemeine Parabel mit beliebigem Exponenten n_{PR} werden häufig genutzt und besitzen nur geringfügige Unterschiede im Verlauf der Funktionen (Bild 3.2).

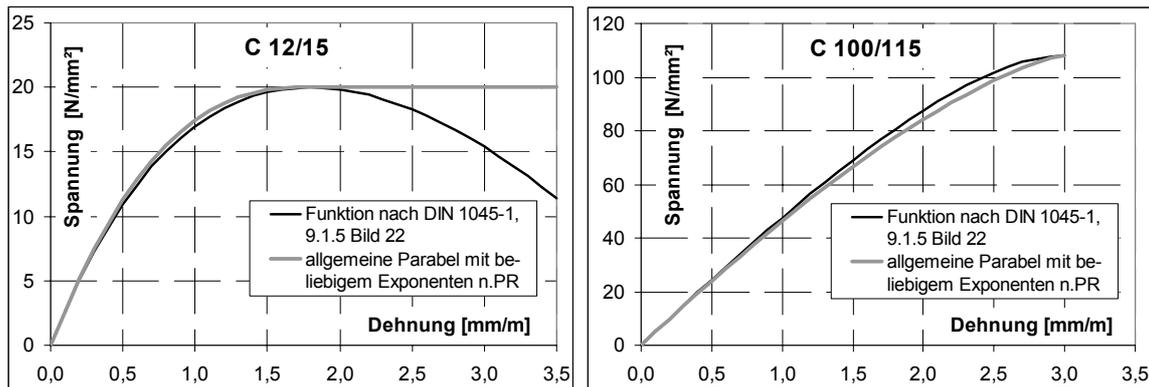


Bild 3.2 Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Linien mit verschiedenen Funktionen

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie jenseits des Scheitels ist für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung häufig nicht von Interesse, da die Beanspruchungen meist unterhalb der maximalen Spannung bleiben. Auch wird bereits durch die Mindestbügelbewehrung die Druckzone umschnürt und die Querdehnung behindert, so dass praktisch kein Abfall der Spannungs-Dehnungs-Linie auftritt und die erreichbaren Dehnungen beim Versagen der Druckzone höher liegen.

Mit der Spannungs-Dehnungs-Linie 1 entsprechend DIN 1045-1 (Kapitel 9.1.5, Bild 22, gebrochen-rationale Funktion) können sich für einige Parameterkombinationen Schwierigkeiten bei der Spannungsintegration ergeben. In Kapitel 3.2.6 wird darauf näher eingegangen.

3.1.3 Versteifende Mitwirkung des Betons in der Zugzone

Für eine wirklichkeitsnahe Ermittlung der Schnittgrößen und Verformungen von Stahlbetontragwerken ist eine Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons in der gerissenen Betonzugzone erforderlich.

Die grundlegenden Zusammenhänge zur versteifenden Mitwirkung sind sehr komplex und hängen von vielfältigen Parametern ab, wie Stabdurchmesser, Größe und Anordnung der Rippen auf der Bewehrungsoberfläche, daraus resultierenden Verbundeigenschaften, Lage und Verteilung der Bewehrung im Betonquerschnitt, Anordnung von Schwachstellen in der Zugzone (z.B. Bügel, Querbewehrung), bisherige Belastungsgeschichte mit evtl. vorhandenen Vorschädigungen und natürlich der Zugfestigkeit des Betons.

Um jedoch ein für die praktische Anwendung handhabbares Rechenverfahren zu erhalten, ist eine gewisse Vereinfachung und Reduzierung der Einflussparameter unabdingbar. Auch wegen der unvermeidbaren großen Schwankungen der Zugfestigkeit des Betons und der weiteren Parameter erhöht eine genauere Betrachtung nicht unbedingt die Güte der Ergebnisse. Infolgedessen wird in der vorliegenden Arbeit auf einen einfachen

Ansatz von QUAST zurückgegriffen. In [2] hat QUAST die Methode erläutert und die wichtigsten Ergebnisse von 39 Versuchsnachrechnungen veröffentlicht. Für baupraktische Belange konnte eine ausreichend gute Übereinstimmung gezeigt werden.

Die grundlegenden Annahmen nach QUAST lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- volle Mitwirkung des Betons auf Zug bis zur Rissdehnung ϵ_{cr} bzw. bis zum Erreichen der rechnerischen Zugfestigkeit des Betons $f_{ct,R}$
- entsprechend der vorhandenen Betondehnung reduzierte versteifende Mitwirkung des Betons in der Zugzone
- keine Mitwirkung des Betons nach dem Einsetzen des Fließens der Bewehrung

Erreicht wird dies durch die in Bild 3.3 gezeigte Spannungs-Dehnungs-Linie für den Zugbereich des Betons sowie durch Berechnung eines Abminderungsfaktor VMB (**V**ersteifende **M**itwirkung **B**eton), der entsprechend Bild 3.4 ermittelt wird und mit dem die Betonzugspannungen abgemindert werden.

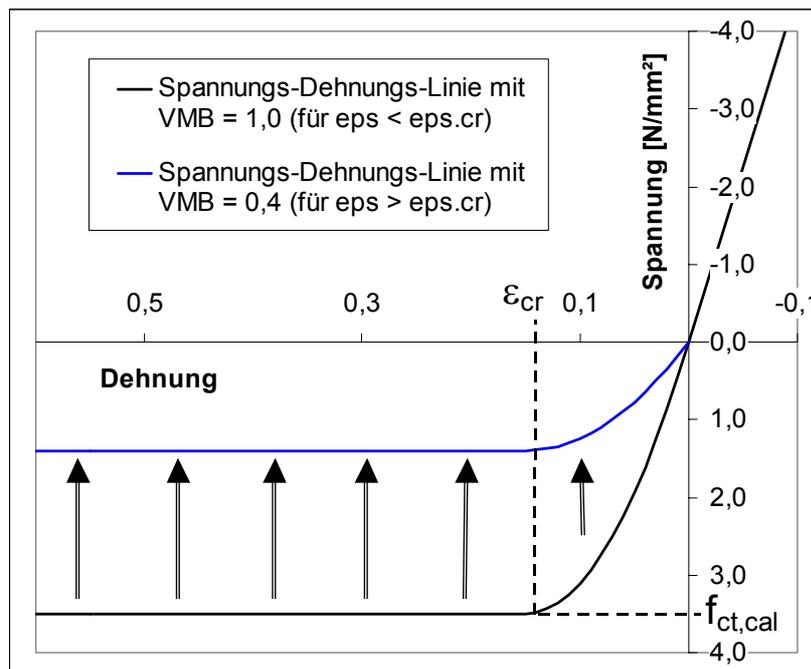


Bild 3.3 Spannungs-Dehnungs-Linie Beton im Zugbereich als Parabel-Rechteck-Diagramm, Abminderung der Zugspannungen mit dem Faktor VMB, hier beispielhaft für VMB = 0,4 gezeigt.

Definition für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$ (allgemeine Parabel mit beliebigem Exponent)

$$\sigma = VMB \cdot \left[f_{ct,R} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \right)^{n_{PR}} \right) \right] \tag{3.1}$$

Definition für $\varepsilon_{cr} < \varepsilon$ (konstanter Verlauf)

$$\sigma = VMB \cdot f_{ct,R} \tag{3.2}$$

Die Völligkeit des ersten Abschnitts (allgemeine Parabel, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$) kann durch den Exponenten n_{PR} gesteuert werden, der so angepasst werden sollte, dass der Übergang zum Druckbereich möglichst mit gleichem E-Modul erfolgt.

Die Berechnung des Abminderungsfaktors VMB erfolgt in Abhängigkeit der Betondehnung in Höhe der am stärksten gezogenen Stahlfaser. Brauchbare Erfahrungswerte für den Verlauf im Zustand II (Parabel mit beliebigem Exponenten) sind die Werte $n = 1,0$ (linear) bis $n = 2,0$ (Parabel).

Weitere Erfahrungswerte: $\varepsilon_{cr} = 0,10$ bis $0,15$ mm/m $\varepsilon_u = 2,0$ bis $3,0$ mm/m $\approx \varepsilon_y$

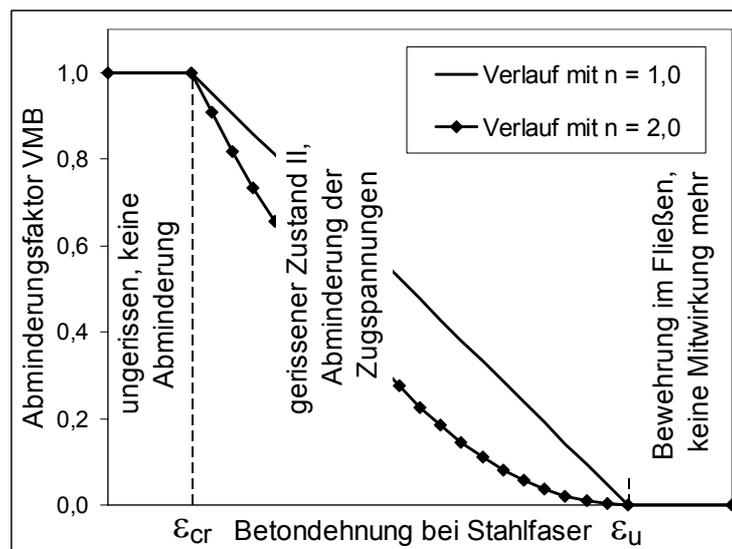


Bild 3.4 Berechnung des Abminderungsfaktors VMB

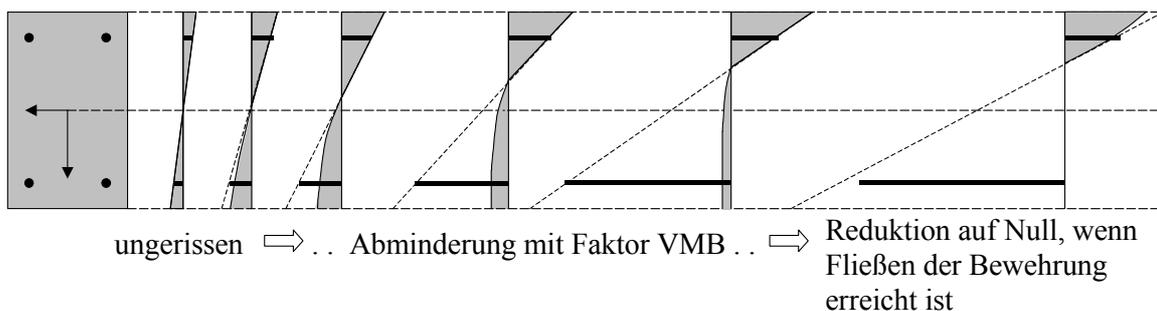


Bild 3.5 Spannungszustände für steigende Beanspruchung (von links nach rechts)

Die zuvor beschriebene Abnahme der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Null beim Fließen der Bewehrung ($\epsilon_u = \epsilon_{\text{yield}}$) ist nur bedingt eine Eigenschaft der Bewehrung und ihrer Fließgrenze. Bei Versuchsnachrechnungen hat sich herausgestellt, dass bei einer Dehnung zwischen $\epsilon_u = 2,0$ bis $3,0$ mm/m die versteifende Wirkung des Betons durch den gestörten Verbund zwischen Beton und der gerippten Bewehrung vernachlässigbar klein geworden ist. Die Festlegung des Wertes auf die Fließgrenze bei üblichen Betonstählen bedeutet jedoch eine gewollte Vereinfachung für eine nichtlineare Rechnung, da auf diese Art und Weise Bereiche mit negativen tangentialen Biegesteifigkeiten vermieden werden.

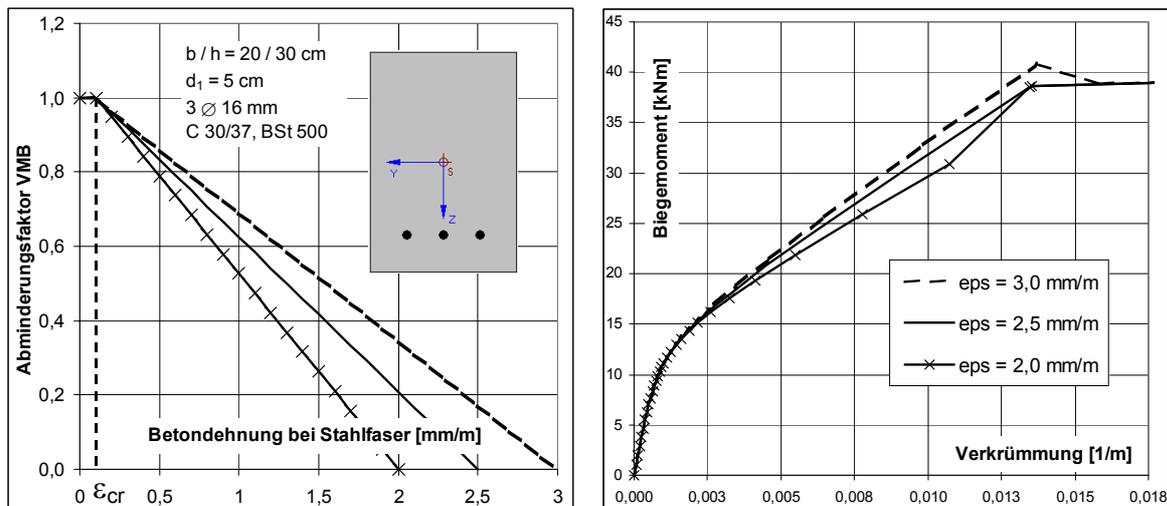


Bild 3.6 links - Querschnitt und Mitwirkungsgesetz für $\epsilon_u = 2,0 / 2,5 / 3,0$ mm/m, rechts - resultierende Moment-Verkrümmungs-Linien

In Bild 3.6 sind für einen Rechteckquerschnitt beispielhaft verschiedene Werte der Dehnung ϵ_u zur Ermittlung der Moment-Verkrümmungs-Linien benutzt worden. Der Wert $\epsilon_u = 2,5$ mm/m stellt für einen BSt 500 die Standardmodellierung dar, bei der Fließen der Bewehrung und Abfall der versteifenden Mitwirkung auf Null zusammenfallen. Mit $\epsilon_u = 3,0$ mm/m $>$ $\epsilon_y = 2,5$ mm/m ergibt sich in der M-k-Linie im Bereich des Fließmoments ein fallender Bereich mit negativen Tangentensteifigkeiten, so dass die M-k-Linie für eine Rechnung mit dem Übertragungsverfahren nicht brauchbar ist.

Die Modellierung mit einem kleineren Wert (z.B. $\epsilon_u = 2,0$ mm/m) ist unproblematisch, da sich nur ein zusätzlicher Knick unterhalb von M_{yield} ergibt. Bei Baustoffen mit höherer Fließdehnung (z.B. Spannstahl oder Carbon / Aramid / Glasfasern) ist der Wert für ϵ_u sinnvoll zu begrenzen und gegebenenfalls der Wert des Exponenten n leicht zu erhöhen, um den schlechten Verbundeigenschaften zwischen der glatten Bewehrungsoberfläche und dem Beton Rechnung zu tragen.

Schwinden des Betons und Vorspannung der Bewehrung können als Vordehnung des Betons und der Bewehrung modelliert werden. Um auch in diesen Fällen korrekte Ergebnisse zu erhalten, werden die Werte für ε_{cr} und ε_u im Programm automatisch entsprechend der Vordehnung verändert.

3.1.4 Diskussion des Mitwirkungsgesetzes für den Beton auf Zug

Neben möglichst guten Ergebnissen bei Versuchsnachrechnungen stand die Stabilität und die einfache Handhabung bei der numerischen Anwendung des Verfahrens im Vordergrund. Aus diesem Grund wurden einige, für den Normalfall vernachlässigbar kleine Ungenauigkeiten in Kauf genommen, so dass nichtlineare Berechnungen von Stabwerken mit dieser Methode zumeist eine sehr gute Konvergenz aufweisen. Die Vielzahl der durchgeführten Rechnungen zeigen eindeutig, dass bei korrekter Modellierung die Rechnung im gerissenen Zustand keine Probleme bereitet und die Belastung meist noch in einem Schritt aufgebracht werden kann.

Die Ungenauigkeiten und Limitierungen des Modells sollen im folgenden beschrieben und diskutiert werden. Außerdem werden Anregungen zur Verbesserung gegeben.

Lage des Referenzpunktes zur Ermittlung der maßgebenden Dehnung

Zur Berechnung des Abminderungsfaktors VMB wird die Betondehnung an der Stelle der am stärksten gezogenen Stahlfaser benutzt. Damit wird der Wert VMB genau dann auf Null reduziert, wenn das Fließen der Bewehrung einsetzt. Der Beginn der Abminderung setzt bei Nutzung dieses Referenzpunktes jedoch etwas zu spät ein, da bei Erreichen von ε_{cr} in Höhe der Bewehrung die Dehnung am Querschnittsrand bereits größer als ε_{cr} ist. Für normale Querschnitte ist dieser Fehler vernachlässigbar. Querschnitte mit sehr großem Randabstand d_u werden dagegen zu steif gerechnet, wobei sich dieses Problem sehr einfach durch die

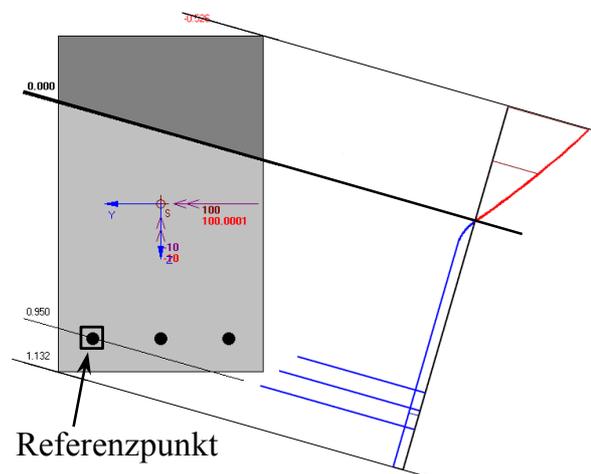


Bild 3.7 Lage des Referenzpunktes zur Ermittlung der maßgebenden Dehnung, resultierende Spannungsverteilung

Definition eines Pseudo-Bewehrungspunktes am Betonrand umgehen lässt. Bei Verbundquerschnitten mit außenliegendem Stahlprofil erfolgt die Abminderung dagegen zu früh, jedoch wird auch dieser Fehler als vernachlässigbar erachtet.

Parabelförmiger Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie im Zugbereich

Querschnitte, deren Rand-Zugspannungen kurzzeitig unter f_{ct} bleiben, werden nicht aufreißen und eine Randdehnung von $\epsilon_{Rand} = \sigma_{c,Rand} / E_c$ erreichen. Durch die Annahme eines parabelförmigen Verlaufs werden die Randdehnungen geringfügig überschätzt.

Hintergrund ist, dass einerseits der Wechsel der Biegesteifigkeit zwischen dem ungerissenen und dem gerissenen Querschnitt durch diese Vorgehensweise näherungsweise stetig erfolgt. Bei Modellierung mit linearem ersten Teil und waagrechttem zweiten Abschnitt würde die Biegesteifigkeit des Querschnitts dagegen sehr plötzlich abfallen, was die Iteration bei einer nichtlinearen Stabwerksrechnung etwas aufwändiger macht. Ein weiterer Grund ist auch, dass mit dem parabelförmigen Verlauf die Bildung von Mikrorissen und die resultierende Abnahme der Biegesteifigkeit bei längerer Belastung modelliert werden kann. In Bild 3.8 sind die Unterschiede in der Steifigkeit für einen Rechteckquerschnitt dargestellt.

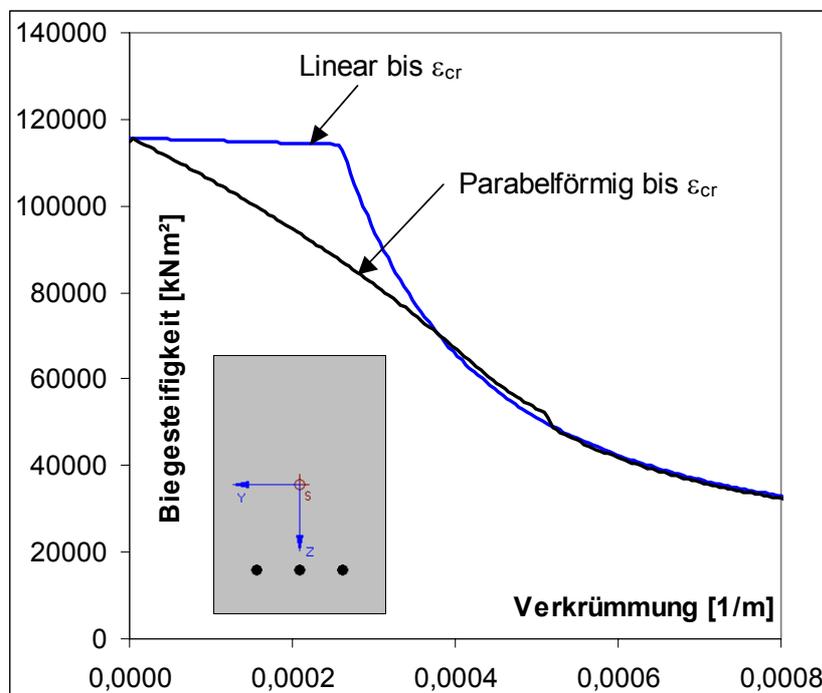


Bild 3.8 Vergleich des Verlaufs der Biegesteifigkeiten über die Verkrümmung bei unterschiedlicher Formulierung der Spannungs-Dehnungs-Linie für die Zugzone

Gering bewehrte Querschnitte

Bei gering bewehrten, insbesondere bei unterbewehrten Querschnitten, wird die versteifende Mitwirkung mit der Standardformulierung (Exponent $n = 1$) eher zu hoch abgeschätzt. Für die Rechnung wird die gesamte Betonzugzone benutzt, in Wirklichkeit treten jedoch nur im Beton um die Bewehrungsstäbe herum nennenswerte Zugspannungen auf.

Eine erste Möglichkeit der Anpassung ist die Vergrößerung des Exponenten n , der den Verlauf der Abminderung beschreibt. Doch bereits bei einem Wert von $n = 2$ ergeben sich bei dem gezeigten Querschnitt bei der Verkrümmung $k = 0,004 \text{ m}^{-1}$ negative Steifigkeiten.

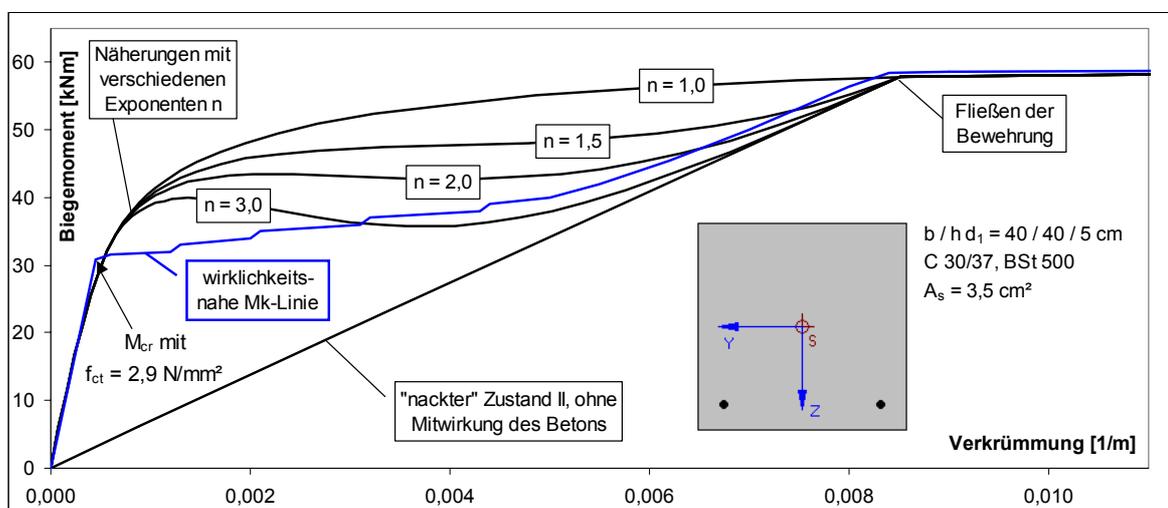


Bild 3.9 Verschiedene M-k-Linien für einen Rechteck-Querschnitt mit einem Bewehrungsgehalt von $\rho \approx 0,22 \%$

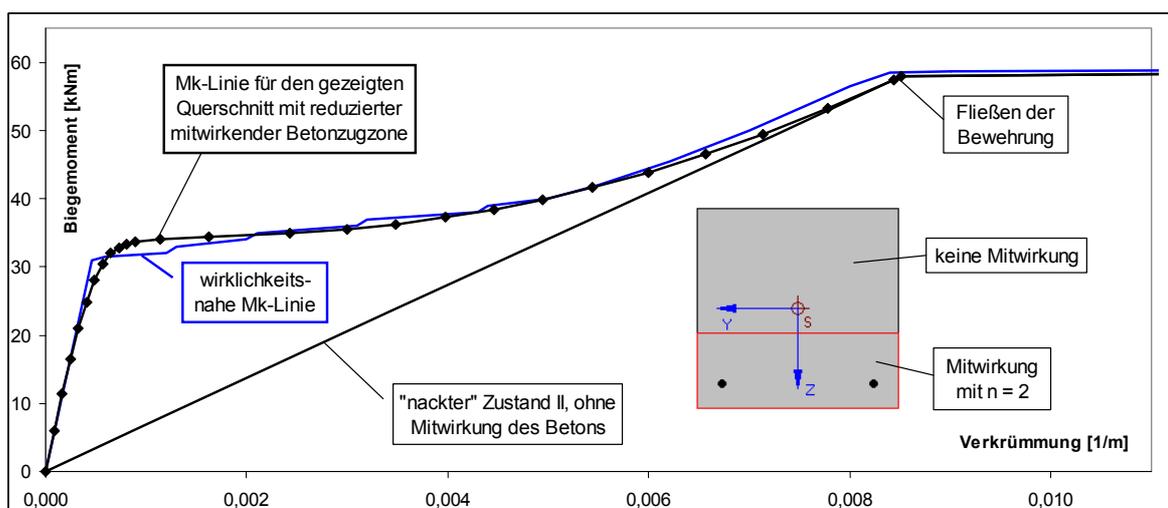


Bild 3.10 Verbesserte M-k-Linie für einen Querschnitt bei Rechnung mit reduzierter mitwirkender Betonzugzone

Für $n = 3,0$ ist dies noch deutlicher zu erkennen. Eine Verwendung der M-k-Linie für das Übertragungsverfahren ist damit nicht mehr möglich.

Deutlich bessere Ergebnisse liefert erst eine immer mögliche und mit Mehraufwand verbundene Reduktion der mitwirkenden Betonfläche, wie dies in Bild 3.10 dargestellt ist. Die Biegesteifigkeit im ungerissenen Zustand wird korrekt abgebildet. Bei Einsetzen der Rissbildung vergrößert sich die Verkrümmung sehr stark, ohne dass jedoch negative Tangentensteifigkeiten auftreten.

Ermittlung der Zugfestigkeit f_{ct} und der Rissdehnung ε_{cr}

Eine genaue Festlegung dieser Werte verhindert der Baustoff Beton selber. Sind die Bedingungen im Labor noch zu kontrollieren und der Wert der Zug- als auch Druckfestigkeit in etwa abschätzbar, so stellen die Bedingungen auf der Baustelle eine große Hürde für eine genauere Ermittlung von f_{ct} dar. Bereits eine etwas andere Nachbehandlung, frühes Trocknungsschwinden oder einsetzender Frost liefern bei gleichem Ausgangsmaterial verschiedene Zugfestigkeiten. Aus diesem Grund können zwar tendenzielle Aussagen getroffen werden, generell sollte jedoch z.B. bei der Berechnung von Verformungen ein oberer und ein unterer Wert der Baustoffeigenschaften benutzt werden.

Die näherungsweise Berechnung der Rechenwerte $f_{ct,R}$ und $\varepsilon_{cr,R}$ hat QUAST mit

$$f_{ct,R} = \left| \frac{1}{20} \cdot f_{cm} \right| \quad \text{und} \quad \varepsilon_{cr,R} = \left| \frac{1}{20} \cdot \varepsilon_{c1} \right| \quad (3.3)$$

vorgeschlagen. Die Werte für $f_{ct,R}$ sind damit niedriger als die Vorgaben aus dem EC2 oder der DIN 1045-1, bei der das Verhältnis f_{cm} / f_{ctm} zwischen 12,5 für einen C12/15 und 20,8 für einen C100/115 variiert. Der Grund dafür ist die spezielle Formulierung der Spannungs-Dehnungs-Linie im Zugbereich und die Berechnung des Abminderungsfaktors VMB, bei der die angenommenen Zugspannungen und die resultierende Zugkraft nach Überschreiten der Zugdehnung nur langsam reduziert werden. So ergibt sich bei einer Dehnung von $2 \cdot \varepsilon_{cr}$ noch eine wirkende Zugspannung von ca. $\sigma \approx 0,95 \cdot f_{ct,R}$. Damit kann bei Biegung die Verringerung der Steifigkeit in etwa an der richtigen Stelle vorhergesagt werden. Bei einer reinen Zugnormalkraft sind die Rechenwerte $f_{ct,R} = \left| \frac{1}{20} \cdot f_{cm} \right|$ jedoch zu klein. Die Annahme der Werte für $f_{ct,R}$ entsprechend den Vorgaben aus der DIN 1045-1 liefert in diesem Fall bessere Ergebnisse (siehe Bild 3.11).

Den eigenen Erfahrungen zufolge sind mit den von QUAST vorgeschlagenen Werten vor allem für normalfeste Betone bis C30/37 oder C40/50 gute Ergebnisse zu erzielen. Bei höherfesten Betonen sollte jedoch eine weitere Abminderung erfolgen, da die Zugfestigkeit nicht mehr proportional mit der Druckfestigkeit steigt. Bei Orientierung an den Vorgaben der DIN 1045-1 ergibt sich die Möglichkeit, die dort gegebenen

Zugfestigkeiten auf ca. 60% zu reduzieren, um für das beschriebene Modell der Zugzone gute Rechenwerte für $f_{ct,R}$ zu erhalten.

In Tabelle 3.1 und 3.2 sind die Baustoffkennwerte der DIN 1045-1 eingetragen, in Zeile 10 die rechnerische Zugfestigkeit für das beschriebene Modell. Der Zeile 11 ist das Verhältnis zwischen Druckfestigkeit und der rechnerischen Zugfestigkeit zu entnehmen, welches zu Beginn wie bei der bisherigen Annahme bei etwa 20 liegt. Für höherfeste Betone wird dieses Verhältnis größer. Der Wert n_{PR} ist der Exponent für die Parabel-Funktion im ersten Abschnitt der Spannungs-Dehnungs-Linie im Zugbereich, so dass ein stetiger Verlauf der Steifigkeiten zwischen Druck- und Zugbereich erreicht wird.

Tabelle 3.1 Baustoffkennwerte der DIN 1045-1 und Vorschlag für die rechnerischen Werte für die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug

Angaben aus DIN 1045-1										
1		C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
2	$f_{ck,cyl}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
3	$f_{ck,cube}$	15	20	25	30	37	45	50	55	60
4	f_{cm}	20	24	28	33	38	43	48	53	58
5	ε_{c1}	-1,8	-1,9	-2,1	-2,2	-2,3	-2,4	-2,5	-2,55	-2,6
6	f_{ctm}	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
7	E_{cm}	25800	27400	28800	30500	31900	33300	34500	35700	36800
Parameter für das Modell nach QUAST										
8	$f_{ct,R}$	0,96	1,14	1,32	1,56	1,74	1,92	2,10	2,28	2,46
9	f_c / f_{ct}	20,8	21,1	21,2	21,2	21,8	22,4	22,9	23,2	23,6
10	$\varepsilon_{cr,R}$	0,086	0,090	0,099	0,104	0,105	0,107	0,109	0,110	0,110
11	n_{PR}	2,554	2,386	2,376	2,237	2,124	2,044	1,977	1,889	1,815

Angaben aus DIN 1045-1							
1		C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105	C100/115
2	$f_{ck,cyl}$	55	60	70	80	90	100
3	$f_{ck,cube}$	67	75	85	95	105	115
4	f_{cm}	63	68	78	88	98	108
5	ε_c	-2,65	-2,70	-2,80	-2,90	-2,95	-3,00
6	f_{ctm}	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2
7	E_{cm}	37800	38800	40600	42300	43800	45200
Parameter für das Modell nach QUAST							
8	$f_{ct,R}$	2,52	2,64	2,76	2,88	3,00	3,12
9	f_c / f_{ct}	25,0	25,8	28,3	30,6	32,7	34,6
10	$\varepsilon_{cr,R}$	0,106	0,105	0,099	0,095	0,090	0,087
11	n_{PR}	1,749	1,695	1,603	1,533	1,450	1,381

Ermittlung der Rechenwerte für die Zugzone

$$f_{ct,R} = 0,60 \cdot f_{ct,DIN\ 1045-1} \quad \text{rechnerische Zugfestigkeit} \quad (3.4)$$

$$v = f_c / f_{ct,DIN\ 1045-1} \quad \text{Verhältnis, Hilfwert} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{cr,R} = |\varepsilon_{c1} / v| \quad \text{rechnerische Rissdehnung} \quad (3.6)$$

$$n_{PR} = 1,1 \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cm} \quad \text{Exponent für allgemeine Parabel} \quad (3.7)$$

Ermittlung des Exponenten n zur Berechnung des Abminderungsfaktors VMB

Wie bereits beschrieben benutzt QUAST in seinem Modell den Wert $n = 1$ und erzielt damit vor allem bei der Berechnung von Stützenversuchen bei Wirkung einer Druckkraft eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Der Vorschlag von ESPION [3] mit $n = 1$ bis $n = 2$ zeigt für Balken- und insbesondere für Dehnkörperversuche teilweise bessere Ergebnisse.

Mit $n = 2$ lassen sich reine Zugversuche mit akzeptabler Übereinstimmung nachrechnen, wie Bild 3.11 qualitativ zeigt. Der Wert für die rechnerische Zugfestigkeit $f_{ct,R}$ sollte in diesem Fall jedoch entsprechend den Vorgaben der DIN 1045-1 gewählt werden. Bei Rechnung mit $f_{ct,R} = |^{1/20} \cdot f_{cm}|$ wird der Beginn des Aufreißens zu früh vorhergesagt. Andererseits wäre bei Nutzung von $f_{ct,R} = |^{1/20} \cdot f_{cm}|$ eine Reduktion der Zugfestigkeit unter Dauerlast (auf ca. 70%) oder eine temporär höhere Last, die zu einer geschädigten Zugzone führt, bereits berücksichtigt.

$$N_{cr} = 2,9 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,09 \text{ m}^2 + 12,57 \text{ cm}^2 \cdot 0,091 \text{ mm/m} \cdot 200.000 \text{ N/mm}^2 = 283,85 \text{ kN}$$

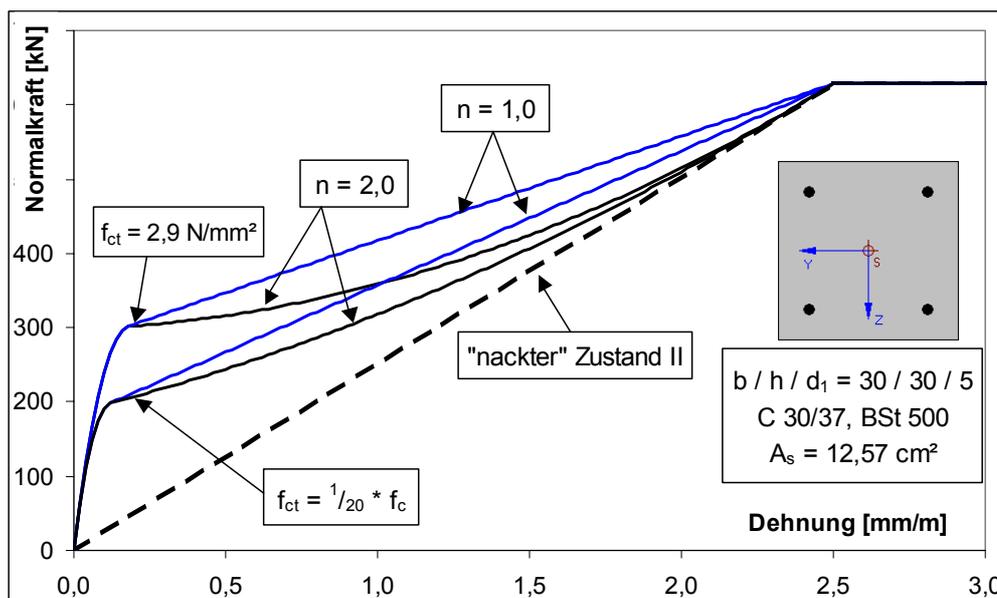


Bild 3.11 Zugkraft-Dehnungs-Linie für einen Rechteckquerschnitt

Annahme eines Parabel-Rechteck-Diagramms für die Zugzone

Die Annahme eines Parabel-Rechteck-Diagramms für die gerissene Betonzugzone ist nur als „Rechenhilfe“ zu verstehen und zeigt auf den ersten Blick große Unterschiede zur experimentellen Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton, die im Labor an Zugproben aus reinem Beton ermittelt werden kann (Bild 3.12). Bei genauerer Betrachtung der vorhandenen Spannungen im Stahlbetonbalken unter Biegemomentenbeanspruchung zeigt sich jedoch, dass diese „Rechenhilfe“ durchaus besser in der Lage ist, die Dehnungen und Spannungen im Mittel zu beschreiben.

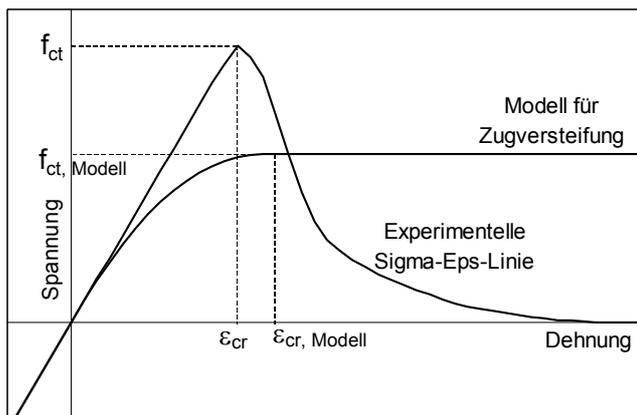


Bild 3.12 Vergleich der experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Linie und der angenommenen Linie zur Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons

Bei Biegung eines Stahlbetonbalkens werden sich an Schwachstellen, wie der Bügelbewehrung oder Fehlstellen in der Betonmatrix, Risse ausbilden, die meist sofort über die Mittelachse hinaus bis zur Dehnungsnulldlinie reichen. Der Betonkörper zwischen zwei Rissen wirkt jetzt als eine Art Scheibe, in die durch die Bewehrung allmählich wieder Zugkräfte eingeleitet werden. Dadurch wird sich ein sehr unregelmäßiger Spannungs- und Dehnungsverlauf im Beton einstellen, der eigentlich der Annahme vom Ebenbleiben des Querschnitts widerspricht. Im Mittel lässt sich jedoch eine Dehnungsebene mit dem Parabel-Rechteck-Diagramm als Spannungsverlauf konstruieren, da es für eine Berechnung der Verformungen nicht auf lokale Effekte ankommt, sondern auf die möglichst gute Erfassung der mittleren Verkrümmungen.

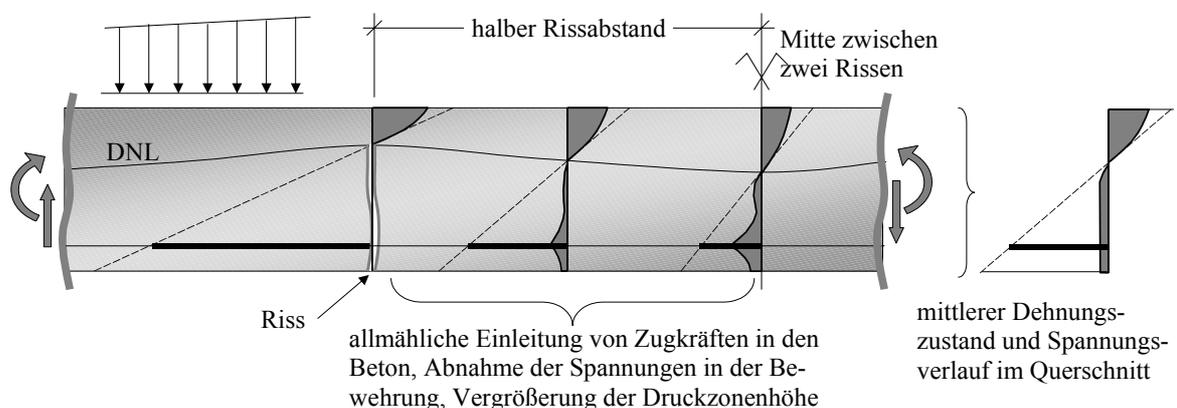


Bild 3.13 Vorhandener Spannungszustand im Balken und Vereinfachung

Wie in Bild 3.13 jedoch auch zu sehen ist, treten vor allem um die Bewehrung herum die größten Zugspannungen auf. Zwischen Dehnungsnulllinie und Bewehrung verringern sich die Spannungen wieder, so dass bei gering bewehrten Querschnitten die mittlere Größe der Zugspannungen überschätzt wird. Eine Verbesserung kann jedoch durch eine Reduktion der wirksamen Betonzugfläche erfolgen, wie dies in Bild 3.10 dargestellt ist.

Zusammenfassung

Da die versteifende Mitwirkung des Betons in der gerissenen Zugzone vor allem für den Gebrauchszustand eine große Bedeutung hat, wurde das benutzte Modell sowie dessen Parameter ausführlich erläutert und Vorteile aber auch Anwendungsgrenzen aufgezeigt. Die Vor- und Nachteile lassen sich wie folgt zusammen fassen:

Vorteile

- leicht zu implementieren, wenig Eingangparameter, keine numerischen Probleme bei der Rechnung durch Vermeidung einer sprunghaften Änderung der Steifigkeiten
- Abbildung der mittleren Verkrümmung sowie einer mittleren Dehnung und Spannung
- relativ gute Übereinstimmung bei der Nachrechnung von Experimenten mit Stützen und Balken bei üblich bewehrten Stahlbetonquerschnitten
- Modell funktioniert auch bei Schwinden

Nachteile

- plötzliches Aufreißen des Querschnitts und sprunghafte Vergrößerung der Verkrümmung nur näherungsweise modellierbar
- keine oder nur bedingte Aussage über lokale Spannungs- und Dehnungszustände möglich
- schlechtere Übereinstimmung bei reinen Zugversuchen von Stahlbeton
- Probleme oder Ungenauigkeiten bei unterbewehrten Querschnitten, bei unüblicher Bewehrungsanordnung (z.B. sehr großer Randabstand), aber auch bei Stahlverbundquerschnitten

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Berechnung von Schnittgrößen und Verformungen größerer Balkensysteme aus Stahlbeton, so dass die Vorteile eindeutig überwiegen und das Modell im Weiteren für die Berechnungen eingesetzt wird.

3.2 Spannungsintegration

Der grundlegende Bestandteil einer Querschnittsberechnung ist die Spannungsintegration. Unter Annahme der Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnitts lässt sich in jedem Punkt des Querschnitts die Dehnung und bei bekannter Spannungs-Dehnungs-Linie die zugehörige Spannung ermitteln. Die resultierenden Schnittgrößen ergeben sich durch Integration wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ -M_z \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot \sigma(y, z) \cdot dA = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot \sigma[\varepsilon(y, z)] \cdot dA \quad (3.8)$$

Anschaulich wird zur Ermittlung der Normalkraft zu einem gegebenen Dehnungszustand (ε_0, k_y, k_z) das „Volumen der Spannungen“ berechnet sowie die Kräfte der einzelnen Bewehrungsstäbe addiert. Mit den zugehörigen Schwerpunkten können anschließend auch die Biegemomente M_y und M_z bestimmt werden.

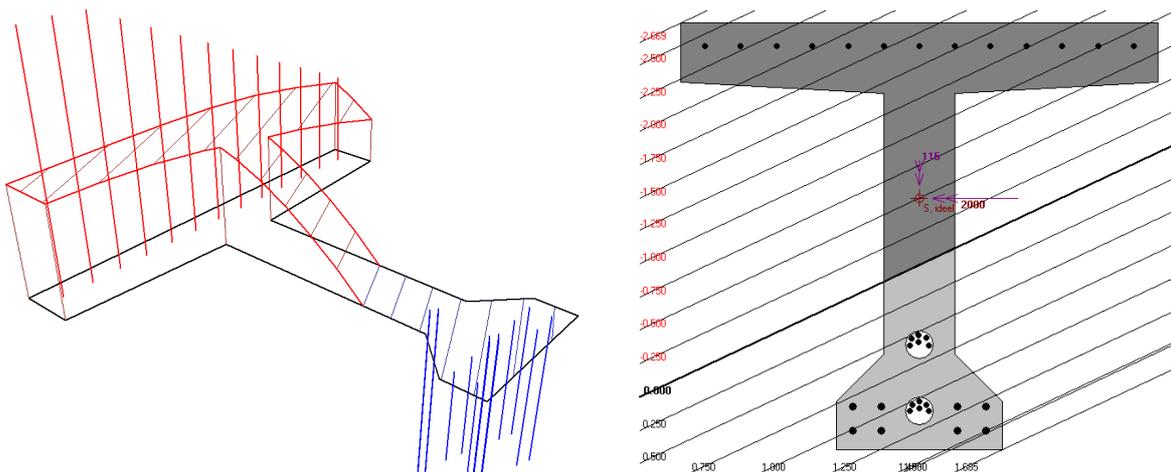


Bild 3.14 „Volumen“ der Druckspannungen für einen vorgespannten Plattenbalken (links) und Dehnungsverteilung (rechts) bei Beanspruchung durch M_y und M_z

Die Berechnung der Integrale aus Gleichung (3.8) kann je nach Zweck der Untersuchung auf verschiedene Arten erfolgen. In den folgenden Kapiteln werden die wichtigsten Möglichkeiten, Vor- und Nachteile sowie deren bevorzugtes Anwendungsgebiet beschrieben.

3.2.1 Integration mittels Summation über kleine Flächen

Eine für normale Querschnittsberechnungen sehr einfache Methode ist die Summation der Spannungen mittels kleiner Rechtecke oder mittels Lamellen. Dazu wird der Querschnitt in entsprechende Untereinheiten aufgeteilt und diese bei der Summation mit einer konstanten Spannung berücksichtigt. Zur Erzielung einer ausreichend hohen Genauigkeit muss die Unterteilung damit sehr fein sein. Auch ist die Einteilung bei Kreisflächen, beliebig orientierten Kanten und bereits bei einer nicht waagerechten Dehnungsnulllinie problematisch. Bei Unterteilung in Lamellen muss bei schiefer Biegung die Teilung ständig neu bestimmt werden. Der Rechen- und Zeitaufwand ist damit relativ hoch, die erzielte Genauigkeit in Relation dazu eher gering.

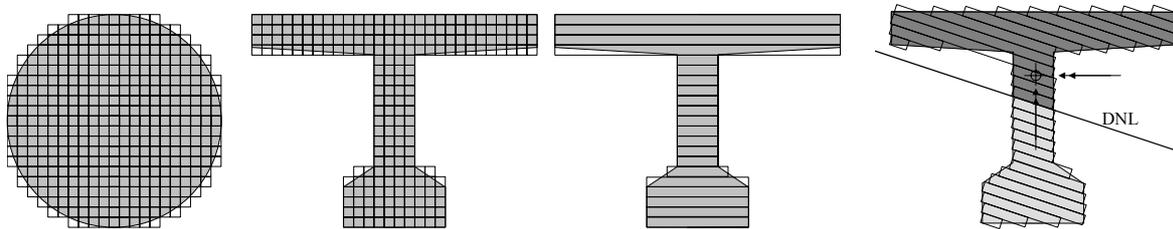


Bild 3.15 Näherungsweise Abbildung mittels Quadraten und Lamellen

Sinnvoll ist diese einfache Vorgehensweise dann, wenn wichtige Informationen zur Spannungsermittlung an nahezu jedem Punkt des Querschnitts erforderlich sind. Das ist zum Beispiel bei Wechselbeanspruchungen mit bleibenden (plastischen) Verformungen der Fall. Auch zur detaillierten Berücksichtigung des Kriechens von Beton in Zeitschritten kann eine derartige Aufteilung vorteilhaft sein. So ist die Berücksichtigung des Belastungsbeginns beim Kriechen für jede Faser einzeln möglich. Werden zeitlich und über den Querschnitt veränderliche Temperaturbeanspruchungen (z.B. Brandeinwirkung oder detaillierte Berechnung beim Abfluss der Hydratationswärme) berücksichtigt, dann ist eine Berechnung mit einer anderen Methode nur noch als Näherung möglich.

Aufgrund der Einfachheit in der Programmierung und der beschriebenen Vorteile bei z.B. veränderlichen Temperaturbeanspruchungen wird diese Methode in aktuellen Veröffentlichungen benutzt [4, 5], ist jedoch für die Berechnung größerer Rahmentragwerke auf Grund des hohen Rechenaufwandes nicht empfehlenswert.

3.2.3 Numerische Spannungsintegration

Die Auswertung des Integrals kann mit relativ wenig Aufwand auch mit Hilfe der numerischen Integration erfolgen. Die in Kapitel 3.2.1 erläuterte Summation über kleine Flächen ist dabei als einfachster, aber aufwändigster Fall zu verstehen. Bessere Ergebnisse mit weniger Rechenaufwand liefern die Integration nach Newton-Cotes oder Gauß-Legendre. Dazu lässt sich das Integral über die Fläche A in zwei Integrale über die Höhe und über die Breite des Querschnitts aufteilen.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ -M_z \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot \sigma(y, z) \cdot dA = \int_{\text{Höhe}} \int_{\text{Breite}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot \sigma[\varepsilon(y, z)] \cdot dy \cdot dz \quad (3.9)$$

Bei der Newton-Cotes-Integration wird der Integrationsbereich in n äquidistante Abschnitte mit den Integrationspunkten x_0 bis x_n eingeteilt, die Funktionswerte an diesen Stellen bestimmt und mittels Gewichtungsfaktoren summiert. Bei Nutzung von n Stützstellen können Polynome mit dem Grad (n - 1) exakt integriert werden.

$$\int_a^b \text{Fkt}(x) \cdot dx = (b-a) \cdot \sum_{i=0}^n C_i^n \cdot \text{Fkt}(x_i) + R_n \quad (3.10)$$

mit R_n = Restglied

Bei der Gauß-Legendre-Integration wird die Position der Stützstellen optimal berechnet, so dass mit n Stützstellen ein Polynom vom Grad (2 · n - 1) exakt berechnet werden kann. Infolgedessen ist diese Methode die beste Wahl, um mit möglichst wenig Rechen- und Zeitaufwand gute Ergebnisse zu erhalten.

$$\int_a^b \text{Fkt}(x) \cdot dx = (b-a) \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_i^n \cdot \text{Fkt}(x_i) + R_n \quad (3.11)$$

Zu integrierendes „Spannungsvolumen“

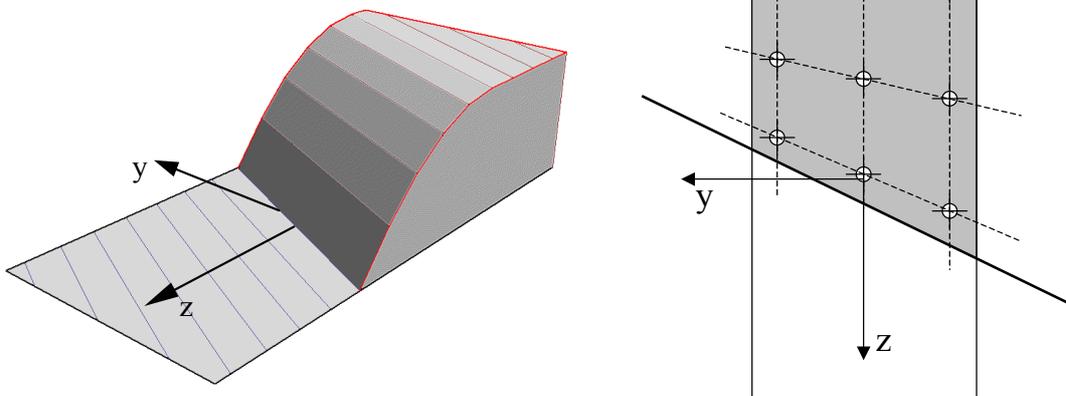


Bild 3.17 Lage der Gaußpunkte bei Nutzung von jeweils 3 Stützstellen

Zur Steigerung der Genauigkeit kann einfach eine höhere Anzahl an Stützstellen benutzt werden. Außerdem sollte bei Änderung der Funktion eine Unterteilung des Integrationsbereichs erfolgen. Bei Nutzung des abschnittsweise definierten Parabel-Rechteck-Diagramms wäre das der Übergang zwischen der Parabel und dem Rechteck-Teil.

Sowohl die Gewichtungsfaktoren als auch die Position der Stützstellen im Fall der Gauß-Legendre-Integration können der Literatur [7] entnommen werden.

3.2.4 Kombination von analytischer und numerischer Integration

Für alle üblichen Sigma-Epsilon-Linien ist eine exakte analytische Integration der Spannungs-Dehnungs-Funktion sehr leicht möglich. Bei Kenntnis des Flächeninhalts unter dieser Funktion und des Schwerpunkts der Resultierenden kann die zweite Integration längs der Querschnittsberandung (Bild 3.18) mit Hilfe der numerischen Integration bestimmt werden.

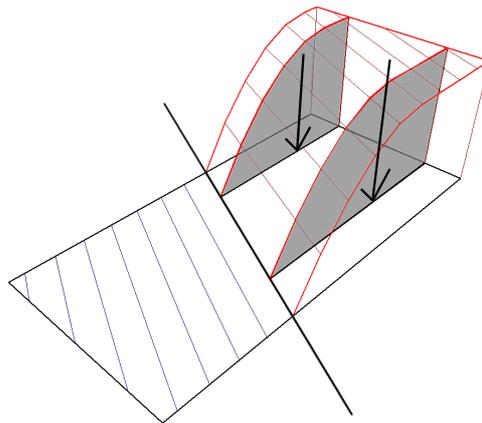


Bild 3.18 Kombination von analytischer Integration (über die Höhe des Querschnitts) und numerischer Integration (über die Breite) bei Nutzung von 2 Stützstellen

Der Vorteil liegt in der weiteren Erhöhung der Rechengeschwindigkeit und der Genauigkeit, da das Integral der Spannungs-Dehnungs-Funktion exakt ausgewertet wird und im allgemeinen weniger Rechenaufwand erfordert, als eine Rechnung mit z.B. 3 Stützstellen, bei der die Funktion drei mal ausgewertet werden muss. Insbesondere bei der Verwendung von Polygonzügen, Splines bzw. allgemein abschnittsweise definierten Funktionen bietet diese Vorgehensweise einen zeitlichen Vorteil, da ein Großteil der Rechnung für eine Spannungsintegration nur einmal zu Beginn durchgeführt werden muss.

3.2.5 Analytische Integration von Spannungs-Dehnungs-Linien

Für die zwei häufigsten Spannungs-Dehnungs-Linien sind die Formeln zur Integration im folgenden ohne Herleitung aufgeführt:

Integration der allgemeinen Parabel mit beliebigem Exponenten n (siehe Bild 3.19)

Hilfswerte

$$x_1 = x \cdot \frac{\varepsilon_{c,1}}{\varepsilon_c} \quad \begin{array}{l} \text{Länge der gesamten Parabel von } \varepsilon = 0 \\ \text{bis } \varepsilon = \varepsilon_{c1}, \text{ mit } x = \text{Druckzonenhöhe} \end{array} \quad (3.12)$$

$$\overline{A_p} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c,1}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^{n+1} \right] \quad \text{Bezogene Fläche der Parabel} \quad (3.13)$$

Schwerpunkt der Parabel

$$s_p = \left(1 - \frac{1}{\overline{A_p}} \cdot \left[\frac{1 - \left(1 - \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} \right)^2}{2} - \frac{1}{n+2} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^{n+2} \right) \right] \right) \cdot x_1 \quad (3.14)$$

Resultante

$$A_p = \overline{A_p} \cdot f_c \cdot x_1 \quad (3.15)$$

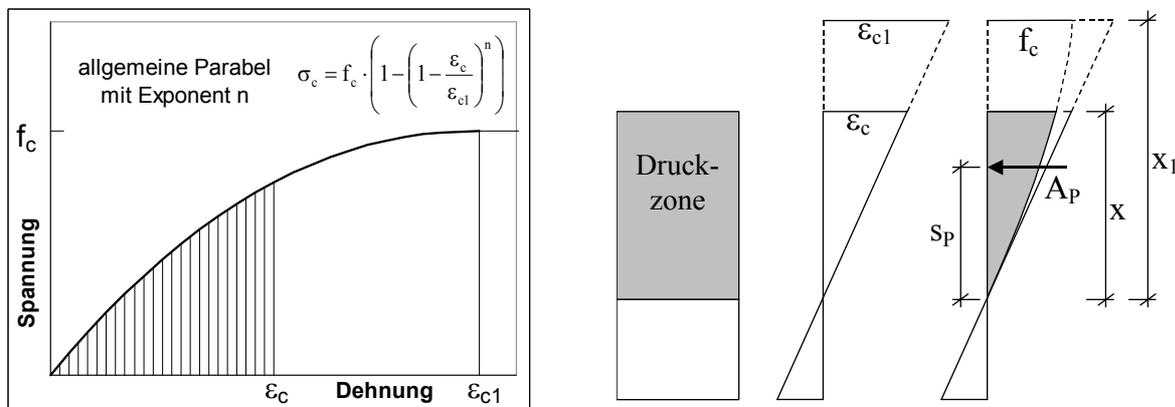


Bild 3.19 Bezeichnungen für allgemeine Parabel mit beliebigem Exponent n

Integration der gebrochen-rationalen Funktion aus DIN 1045-1

(Funktion 1, 9.1.5, Bild 22)

Berechnung von Beiwerten

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad k = 1,1 \cdot E_c \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_c} \quad N = 1 + (k - 2) \cdot \eta \quad (3.16 - 3.18)$$

$$Z_1 = \frac{1}{(k-2)^3} \cdot (0,5 \cdot N^2 - 2 \cdot N + \ln N + 1,5) \quad (3.19)$$

$$Z_2 = \frac{1}{3} \cdot N^3 - \frac{3}{2} \cdot N^2 + 3 \cdot N - \ln N - \frac{11}{6} \quad (3.20)$$

$$\alpha_v = \frac{k}{k-2} \cdot \left(1 - \frac{\ln N}{N-1}\right) - \frac{Z_1}{\eta} \quad \text{Völligkeitsbeiwert} \quad (3.21)$$

Schwerpunkt

$$s_p = x \cdot \frac{1}{\alpha_v \cdot \eta^2} \cdot \left(k \cdot Z_1 - \frac{Z_2}{(k-2)^4}\right) \quad (3.22)$$

Resultante

$$A_p = \alpha_v \cdot f_c \cdot x \quad (3.23)$$

Wegen der positiven Funktionswerte bei größeren Dehnungen endet der Definitionsbereich der Funktion bei der Dehnung ε_u . Ab dort wird mit einer konstanten Spannung gerechnet.

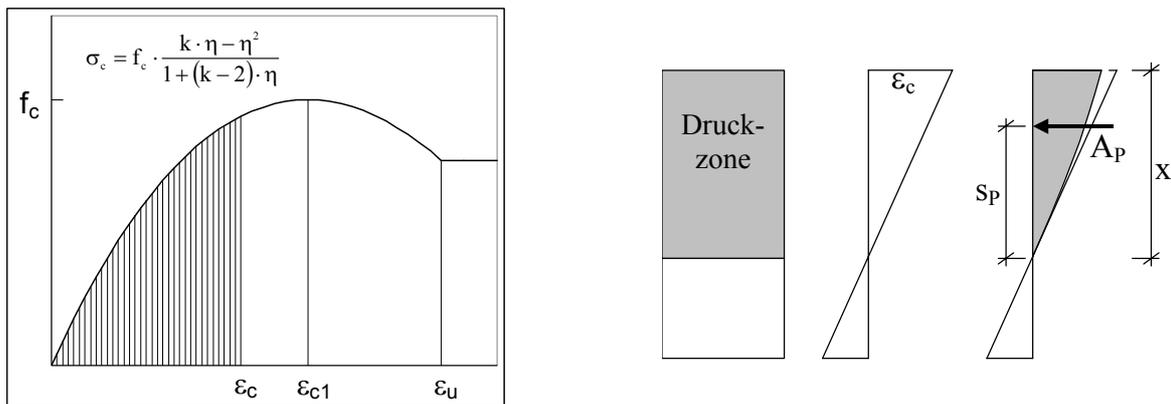


Bild 3.20 Bezeichnungen für Funktion aus DIN 1045-1 (Funktion 1, 9.1.5, Bild 22)

3.2.6 Probleme bei der Integration von Spannungs-Dehnungs-Linien

Für die im EC2 und in der DIN 1045-1 vorgeschlagene Funktion zur Schnittgrößenermittlung

$$\sigma_c = f_c \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \quad \text{mit} \quad k = 1,1 \cdot E_c \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_c} \quad (3.24)$$

ergeben sich bei Anwendung der analytischen Integration für gewisse Parameter numerische Probleme bei der Auswertung der Formeln. Für den Beiwert $k = 2$ wird mit der Funktion eine exakte Parabel mit dem Exponenten $n = 2$ beschrieben. Eine numerische Auswertung der Formeln zur Integration (Gl. 3.16 - 3.23) funktioniert in diesem Fall nicht mehr, da z.B. bei der Ermittlung des Völligkeitsbeiwertes α_v eine Division durch Null erfolgt.

Auch im Bereich für $k = 2 \pm 0,1$ treten in Verbindung mit kleinen Dehnungen Probleme bei der Auswertung auf. In Bild 3.21 ist das Verhalten des Randabstandsbeiwertes über die Dehnung dargestellt. Der Beiwert beträgt in diesem Fall $k = 1,99$.

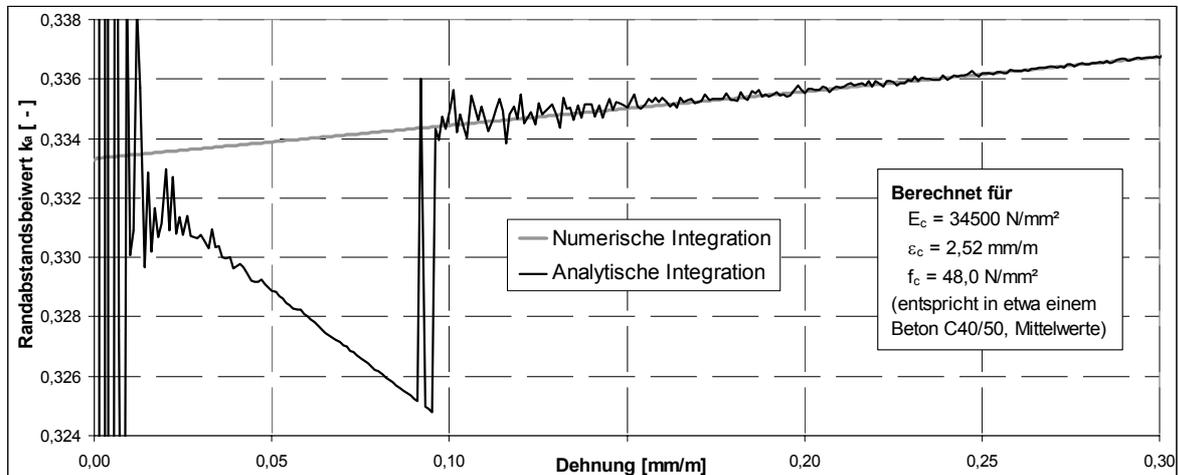


Bild 3.21 Berechnung des Randabstandsbeiwertes k_A mittels analytischer und numerischer Integration, Rechnung mit Excel (Genauigkeit: 15-16 signifikante Stellen)

Deutlich zu erkennen ist das „Zappeln“ der Funktion bei der analytischen Integration um den „wirklichen“ Wert, der mit Hilfe numerischer Integration gewonnen wurde. Für kleine Dehnungen $\varepsilon_0 < 0,01$ mm/m wird die Funktion sogar um einige Zehnerpotenzen falsch berechnet. Als Folge davon lassen sich in einem relativ großen Bereich keine sinnvollen Gradienten $\Delta/\Delta\varepsilon_0$ bilden.

Im gezeigten Beispiel ergibt sich die Ungenauigkeit in der Funktion des Randabstandsbeiwertes für Dehnungen kleiner als 0,25 mm/m durch die Berechnung des Hilfwertes Z_2 in der gezeigten Form:

$$Z_2 = \frac{1}{3} \cdot N^3 - \frac{3}{2} \cdot N^2 + 3 \cdot N - \ln N - \frac{11}{6} \quad (\text{wie Gl. 3.20})$$

Für Eingangswerte $0,99973 < N < 1,0$ wird die Funktion im Tabellenkalkulationsprogramm Excel immer zu $Z_2 = 0$ ausgewertet. Das Problem ist auf die Differenzbildung zweier Zahlen zurückzuführen, wobei die Differenz anschließend mindestens um den Faktor 10^{-15} kleiner als die Ausgangszahlen sind und damit die Rechengenauigkeit mit 15 bis 16 signifikanten Stellen nicht ausreichend ist. Für Eingangswerte $N < 0,99973$ können Differenzen größer als Null bestimmt werden, wobei deren Genauigkeit anfangs bei nur einer signifikanten Stelle liegt. Umgehen lässt sich dieses Problem in einem gewissen Bereich, indem die Funktion für Z_2 wie folgt umgestellt wird.

$$N = 1 + \bar{N} \quad \text{Substitution} \quad (3.25)$$

$$Z_2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + \bar{N})^3 - \frac{3}{2} \cdot (1 + \bar{N})^2 + 3 \cdot (1 + \bar{N}) - \ln N - \frac{11}{6} \quad (3.26)$$

...

$$Z_2 = \bar{N} - \frac{1}{2} \cdot \bar{N}^2 + \frac{1}{3} \cdot \bar{N}^3 - \ln N \quad (3.27)$$

Damit wird das Verhältnis zwischen den Ausgangswerten und dem Ergebnis der Subtraktion verringert, so dass sich damit immerhin die Genauigkeit im Bereich für Dehnungen größer als 0,05 mm/m erhöht. In Bild 3.22 ist die verbesserte Auswertung für den Randabstandsbeiwert dargestellt.

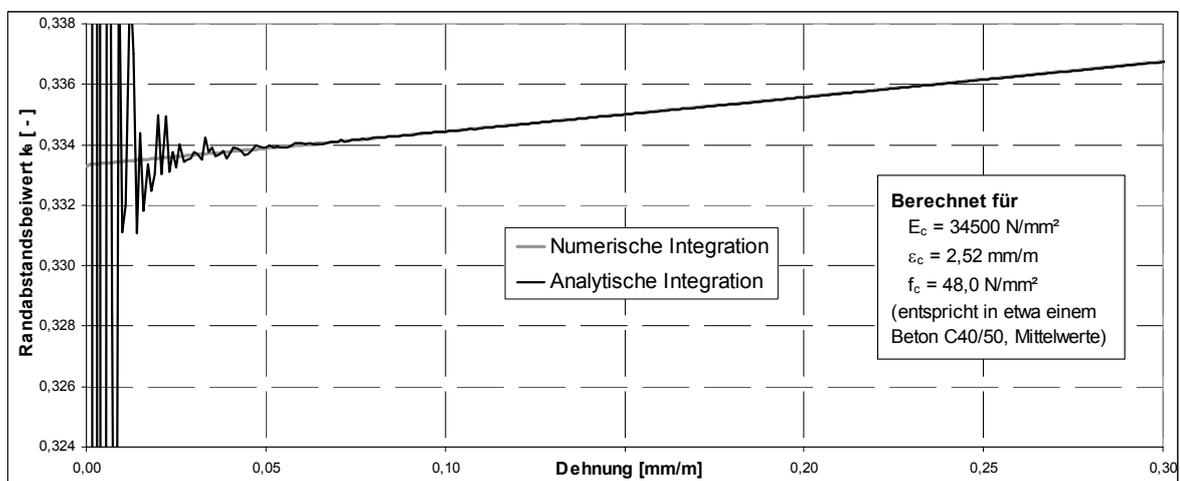


Bild 3.22 Berechnung des Randabstandsbeiwertes k_A mit geänderter Formel für Z_2

Damit ergibt sich zwar eine Verbesserung, jedoch immer noch keine befriedigende Lösung für wirklich alle Fälle. Um die Funktion dennoch für die Modellierung von Stahlbetonquerschnitten benutzen zu können, bleibt nur die numerische Integration, die in allen Bereichen einen stetigen Verlauf der Gradienten gewährleistet. Der Nachteil einer geringfügig kleineren Genauigkeit kann in Kauf genommen werden.

Auch der Verlauf der Funktion jenseits des Scheitelpunktes führt zu eigentlich vermeidbaren Problemen bei der Berechnung eines Querschnitts oder eines Stabwerks. Folgende Punkte sind zu nennen:

- Maximale Querschnittstragfähigkeit wird nicht bei Erreichen der Grenzdehnungen erreicht, sondern meist etwas früher.
- Relativ hoher Rechenaufwand bei der analytischen Integration durch häufige Verwendung der Logarithmusfunktion.

- Numerische Probleme bei der analytischen Integration für einige Parameter.
- Bei Rechnung mit Tangentensteifigkeiten (Übertragungsverfahren für Balken) können sich im Traglastbereich negative Steifigkeiten ergeben, mit denen keine Rechnung möglich ist. Siehe Moment-Verkrümmungs-Linien in Bild 3.23
- Abfallender Bereich der Spannungs-Dehnungs-Linie bei üblicher Verbügelung des Balkens nicht realistisch.
- Funktion ungeeignet bei Überschreiten der Grenzdehnungen \Rightarrow Funktion schneidet die x-Achse und besitzt bei einigen Parametern eine senkrechte Asymptote (Bild 3.24).

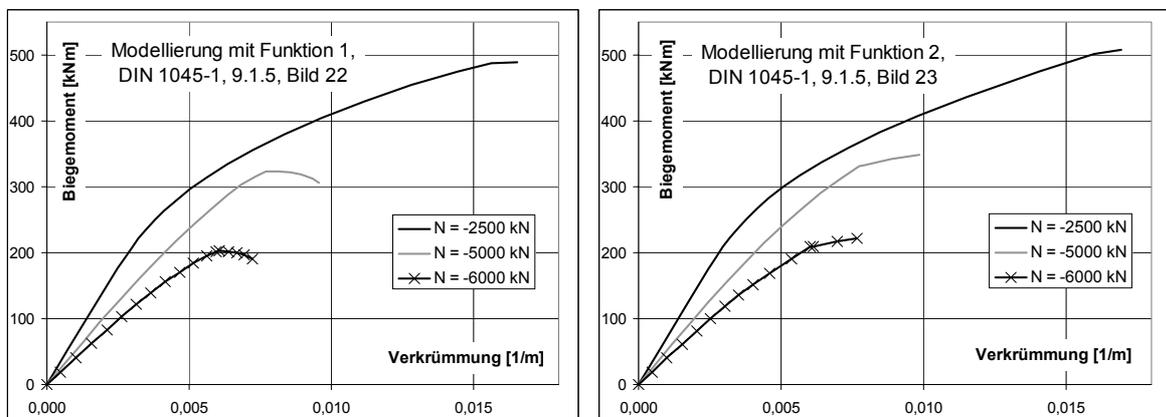


Bild 3.23 Moment-Verkrümmungs-Linien eines Stützenquerschnitts ($b/h/d_1 = 40/40/5$ cm, C30/37, $A_s = 30$ cm²), Modellierung mit Funktion 1 (links) und mit 2 (rechts)

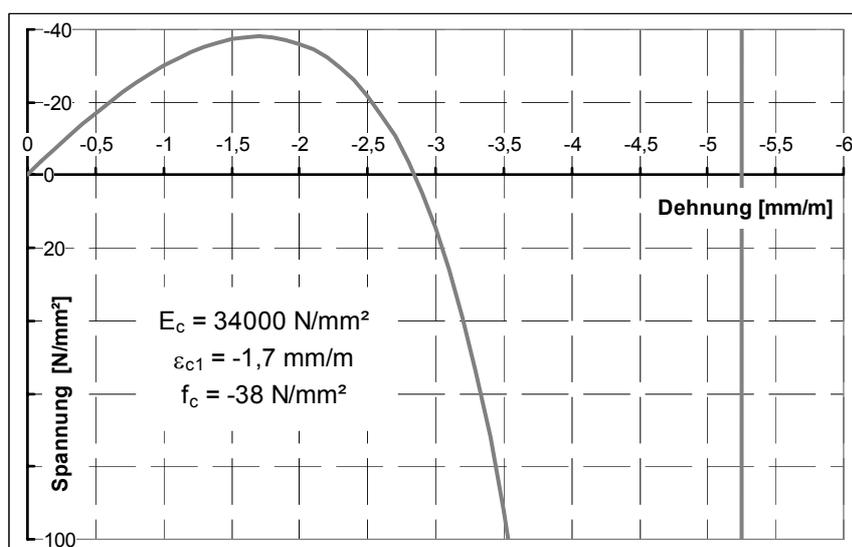


Bild 3.24 Funktionsverlauf jenseits der Grenzdehnungen, bei der gewählten Parameterkombination ergibt sich eine Asymptote bei $\varepsilon = 5,2013$ mm/m.

In der Summe lässt sich damit feststellen, dass die im EC2 oder in der DIN 1045-1 empfohlene Funktion nur bedingt für nichtlineare Berechnungen von Balkentragwerken geeignet ist. Zwar ist die einfache Definition mit nur drei Eingangswerten (E_c , f_c , ε_{c1}) bei der Modellierung sehr angenehm, bei Nutzung der analytischen Integration ergeben sich jedoch in einigen Fällen Probleme. Sowohl die numerischen Nachteile als auch der in einigen Fällen unrealistische, abfallende Ast lassen sich mit einer Parabel-Rechteck-Funktion mit angepassten Parametern für Dehnung, Spannung und den Exponenten n_{PR} umgehen.

3.2.7 Integration polygonal umrandeter Querschnitte

Für die Spannungsintegration des Querschnitts kann das Integral über die Querschnittsfläche in ein Integral entlang der Querschnittsberandung überführt werden

$$N_x = \int_A \sigma(\varepsilon(y,z)) \cdot dA = \oint_{\text{Rand}} fkt(r) \cdot dr, \quad (3.28)$$

wobei r die Laufkoordinate des Randes darstellt (Greenscher Integralsatz). Da sich ein beliebiger Querschnitt in guter Näherung durch ein Polygon mit n Ecken abbilden lässt, kann weiterhin das genannte Integral für die numerische Berechnung in eine Summenformel für die n Querschnittskanten vereinfacht werden.

$$N_x = \sum_{i=1}^n \left[\int_{\text{Ecke } i}^{\text{Ecke } i+1} fkt(r) \cdot dr \right] \quad (3.29)$$

Das Integral von der Ecke i bis zur Ecke $i+1$ wird numerisch mittels Gauß-Legendre-Integration bestimmt. Die Funktion $fkt(r)$ ist dabei die vorzugsweise analytisch integrierte Spannungs-Dehnungs-Linie bis zu einer frei gewählten Bezugslinie. Zur Vereinfachung der Berechnung und Minimierung des Aufwands sollte diese Bezugslinie der Dehnungsnulllinie entsprechen.

Erst wenn die Dehnungsnulllinie sehr weit außerhalb des Querschnitts zu liegen kommt und sich die resultierende Normalkraft als Differenz sehr großer Zahlenwerte ergibt, dann sollte wegen möglicher numerischer Probleme eine andere Bezugslinie, wie zum Beispiel eine Koordinatenachse, gewählt werden. Außerdem ist dann eine komplett numerische Integration durchzuführen.

In Bild 3.25 ist diese Integration für ein Viereck beispielhaft dargestellt. Durch die Richtung der Kanten (0 – 1, 1 – 2 usw.) werden die Vorzeichen der Teilbereiche automatisch festgelegt. Für einen normalen Querschnitt erfolgt die Umfahrungsrichtung des Polygons in mathematisch positivem Drehsinn, für Aussparungen wird die Berechnung mit negativem Drehsinn durchgeführt.

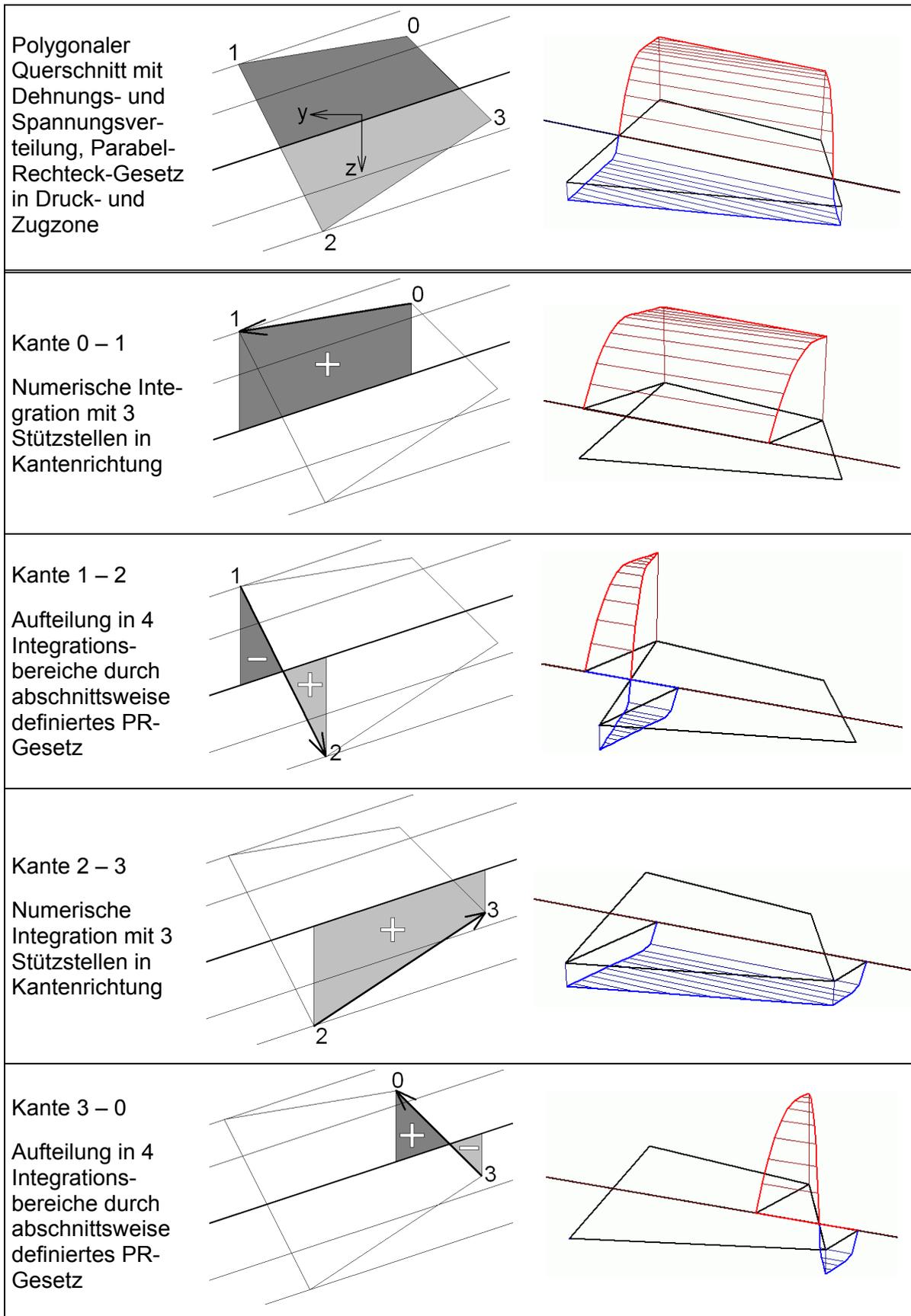


Bild 3.25 Beispiel einer Spannungsintegration entlang der Kanten für ein Viereck

Wie man in Bild 3.25 ebenfalls erkennt, ist eine Koordinatentransformation entsprechend der Lage der Dehnungsnulllinie nicht erforderlich, da jeder Schnitt (außer parallel zur DNL) die gleiche, nur mit einem Faktor gestreckte Spannungs-Dehnungs-Linie wiedergibt. Zur Vermeidung numerischer Probleme ist es jedoch sinnvoll, bei einem Winkel der DNL zwischen 0° und 45° die Schnitte z-parallel zu führen (wie in Bild 3.25 gezeigt), bei einem Winkel zwischen 45° und 90° entsprechend parallel zur y-Achse.

Die Berechnungen zur Integration entlang einer Querschnittskante gliedern sich wie folgt:

- Berechnung der Dehnung $\varepsilon(y,z)$ in den Ecken i und $i+1$
- Evtl. Einteilung der Kante in mehrere Integrationsbereiche (Schnitt mit der Dehnungsnulllinie, zusätzliche Unterteilung bei abschnittsweise definierten Spannungs-Dehnungs-Linien)
- Integration der Spannungen für jeden Integrationsbereich mittels numerischer Integration in Kantenrichtung und analytischer Integration quer dazu, Anzahl der Stützstellen für die numerische Integration je nach Funktion der Spannungs-Dehnungs-Linie
- Berechnung der Schwerpunkte der Spannungen für jeden Integrationsbereich
- Summation der Spannungsresultanten für alle Integrationsbereiche sowie Ermittlung des resultierenden Schwerpunktes

Vordehnung und Vorverkrümmung

Vorgespannte oder vorverkrümmte Querschnittsteile bei nachträglich ergänzten Querschnitten, wie Plattenbalken oder Preflexträgern, können sehr einfach berücksichtigt werden. Dazu wird die Berechnung der für ein Polygon geltenden Dehnungsebene wie folgt erweitert.

$$\varepsilon(y,z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_v + y \cdot (k_y + k_{y,v}) + z \cdot (k_z + k_{z,v}) \quad (3.30)$$

Bewehrungsstäbe

Durch die vergleichsweise kleinen Abmessungen eines Bewehrungsstabs gegenüber dem restlichen Querschnitt reicht es aus, die resultierende Normalkraft in jedem Bewehrungsstab zu bestimmen und diese für alle Stäbe aufzusummieren. Durch Wahl einer negativen Fläche können Aussparungen (z.B. Hüllrohr für Spannglieder) erzeugt werden. Vor allem für hochbewehrte Querschnitte sollte an der Stelle der Bewehrungsstäbe eine Aussparung im Beton berücksichtigt werden.

3.3 Iteration für die Querschnittsberechnung

Der funktionale Zusammenhang zwischen den einwirkenden Schnittgrößen und den resultierenden Dehnungen / Verkrümmungen kann nur im Fall eines linear-elastischen Werkstoffverhaltens in folgender, bekannter Form beschrieben werden.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k_z \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N/EA \\ M_y/EI_y \\ -M_z/EI_z \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Im allgemeinen Fall ergeben sich die Schnittgrößen durch Spannungsintegration.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ -M_z \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot \sigma(x, y) \cdot dA = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot \sigma[\varepsilon(x, y)] \cdot dA \quad (3.32)$$

Der beliebige funktionale Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung macht es damit im Allgemeinen unmöglich, Dehnungen und Verkrümmungen auf analytischem Wege aus den einwirkenden Schnittgrößen zu bestimmen. Zur Bestimmung der unbekanntenen Werte von ε_0 , k_z , k_y wird die Newton-Raphson-Iteration benutzt, so dass sich folgende Gleichung zur Bestimmung der Verbesserungen des Dehnungszustands ergibt.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta N}{\delta \varepsilon_0} & \frac{\delta N}{\delta k_y} & \frac{\delta N}{\delta k_z} \\ \frac{\delta M_z}{\delta \varepsilon_0} & \frac{\delta M_z}{\delta k_y} & \frac{\delta M_z}{\delta k_z} \\ \frac{\delta M_y}{\delta \varepsilon_0} & \frac{\delta M_y}{\delta k_y} & \frac{\delta M_y}{\delta k_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varepsilon_0 \\ dk_y \\ dk_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta N \\ \Delta M_z \\ \Delta M_y \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$\text{mit } k_y = \Delta \varepsilon / \Delta y \quad \text{und} \quad k_z = \Delta \varepsilon / \Delta z$$

Durch Invertierung der Jakobimatrix erhält man die Verbesserungen des Dehnungszustands. Startwerte für ε_0 , k_y und k_z können mittels einer linear-elastischen Rechnung mit angenommenen linearen Querschnittswerten bestimmt werden. Eine gute Möglichkeit, die dazu noch ohne Rechnung auskommt, ist es, den Querschnitt leicht zentrisch zu drücken (z.B. $\varepsilon_0 = -1,0 \text{ mm/m}$, $k_y = 0$ und $k_z = 0$). Durch das steife Verhalten des Querschnitts für diesen Zustand gewährleisten die steilen Gradienten der Jakobimatrix eine schnelle und meist sichere Konvergenz.

3.3.1 Konvergenzverhalten der Querschnittsiteration

Während der nichtlinearen Berechnung eines Tragwerks mittels der vorgestellten Algorithmen beläuft sich der Anteil für die Ermittlung des Dehnungszustands und der zugehörigen Steifigkeitswerte auf ca. 90% der gesamten Rechenzeit. Aus diesem Grund muss die Querschnittsberechnung einerseits sehr schnell sein, weiterhin aber auch in allen Fällen eine sehr sichere Konvergenz zeigen. Vor allem die Sicherstellung einer nahezu 100%igen Konvergenz ist relativ schwierig und kann nur durch Erweiterungen des Standard-Newton-Verfahrens um zusätzliche Kontrollen des Iterationsprozesses sowie einer Dämpfung erreicht werden:

- Flache Gradienten der Jakobi-Matrix \Rightarrow zu große Schrittweite \Rightarrow Dämpfung
- Springen der Lösung \Rightarrow Vergleich der aktuellen Ergebnisse mit den Werten der letzten Iterationen \Rightarrow Dämpfung der Schrittweite
- Divergenz \Rightarrow Kontrolle der Grenzdehnungen sowie der Güte der neuen Näherung \Rightarrow Verwendung anderer Startwerte und/oder Dämpfung der Schrittweite
- Verbesserung des Konvergenzverhaltens \Rightarrow Anpassung der Inkremente $\Delta\varepsilon_0$ und Δk_z zur Ermittlung der Jakobi-Matrix an den jeweiligen Dehnungszustand
- Temporäre Überschreitung der Grenzdehnungen \Rightarrow sinnvoll ergänzte Definition der Spannungs-Dehnungs-Linien, so dass Divergenz vermieden wird
- Bei Fließen der Bewehrung Probleme bei Gradientenbildung und Konvergenz (Gradient gleich Null, Springen der Lösung) \Rightarrow Verringerung der Schrittweite und testen, ob Gradienten wieder ungleich Null sind
- Numerische Probleme bei analytischer Spannungsintegration \Rightarrow Wechsel zur numerischen Integration

Um die Schwierigkeiten bei der Iteration zu verdeutlichen, ist in Bild 3.26 beispielhaft die Normalkraft als Funktion der Dehnung ε_0 und der Verkrümmung k_z dargestellt, wobei die Tangenten an diese Fläche die Gradienten der Jakobi-Matrix darstellen. Im Bereich hoher Zugkräfte ist ein „plastisches Plateau“ zu erkennen, in dem alle Gradienten Null sind und demzufolge die Jakobimatrix singulär wird.

Um die Anzahl der nötigen Iterationsschritte effektiv zu verringern, sind gute Startwerte nötig. Bei einer Stabwerksberechnung kann das Ergebnis des letzten Stababschnittes meist sehr gut als Startwert für den nächsten Abschnitt genommen werden, da sich Normalkraft und Biegemoment meist nur wenig ändern.

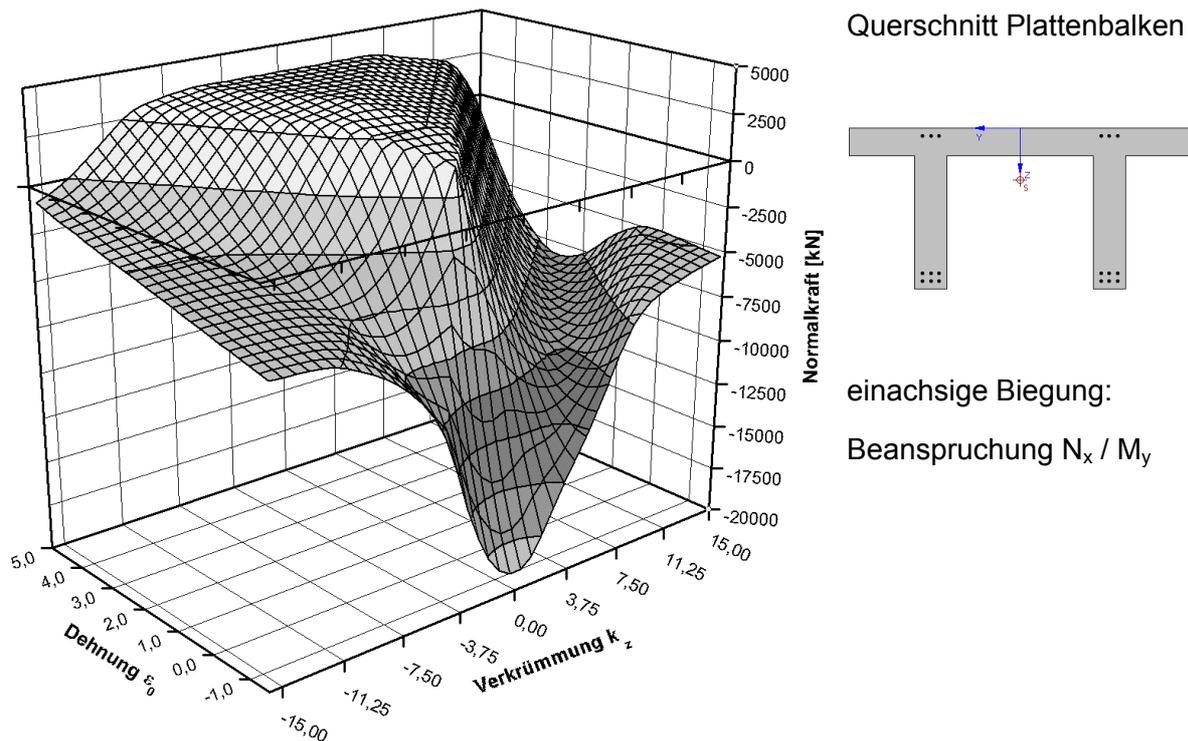


Bild 3.26 Normalkraft als Funktion von ε_0 und k_z , Tangenten an diese Fläche bilden die Gradienten der Jakobi-Matrix

3.4 Sicherheitsnachweis, Dehnungskennziffer

Der Sicherheitsnachweis ist ein elementarer Bestandteil eines Programms zur Querschnittsberechnung. Dabei wird ein Faktor γ gesucht, mit dem alle Schnittgrößen (N_x , M_y , M_z) multipliziert werden, so dass sich für $(\gamma \cdot N_x, \gamma \cdot M_y, \gamma \cdot M_z)$ ein Dehnungszustand ergibt, bei dem mindestens in einer Faser des Querschnitts eine Grenzdehnung erreicht wird.

Die Beschreibung aller Grenzdehnungszustände kann dabei über den Winkel der Hauptkrümmungsrichtung α_K sowie über die als Dehnungskennziffer (DKZ) bezeichnete Funktion erfolgen [1]. Für $DKZ = 0$ ergibt sich der zentrisch gedrückte Querschnitt, für $DKZ = 16$ erfährt der Beton die maximale Stauchung sowie der Stahl die maximale Zugdehnung, für $DKZ = 33$ wird der Querschnitt zentrisch gezogen (Bild 3.27). Die von BUSJAEGER und QUAST entwickelte Idee einer weiteren Unterteilung der DKZ in Bereiche des überdrückten Querschnitts ($DKZ = 0$ bis $DKZ = 5$) wurde zugunsten einer einfacheren Handhabung von Verbundquerschnitten mit außenliegenden Stahlquerschnitten nicht aufgegriffen.

Damit können die Werte der DKZ und des Winkels α_K als Eingangswerte für eine Newton-Raphson-Iteration benutzt werden, wobei DKZ und α_K genau so bestimmt werden, dass der Vektor der sich ergebenden Schnittgrößen die gleiche Richtung besitzt wie der Vektor der Eingangsbeanspruchung. Zur Kontrolle dient der Winkel α_M des resultierenden Moments $M_{\text{res}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ sowie der Winkel α_N des Schnittgrößenvektors zur M_y - M_z -Ebene.

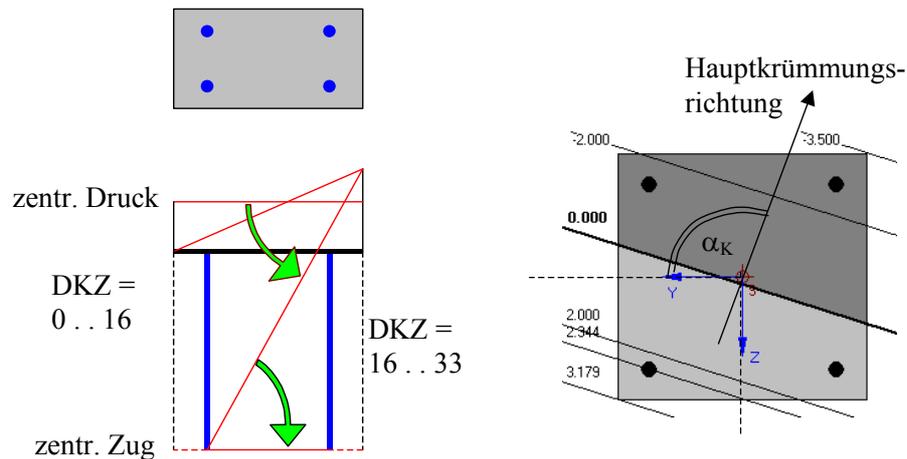


Bild 3.27 Definition der Dehnungskennziffer und des Winkels α_K der Hauptkrümmungsrichtung

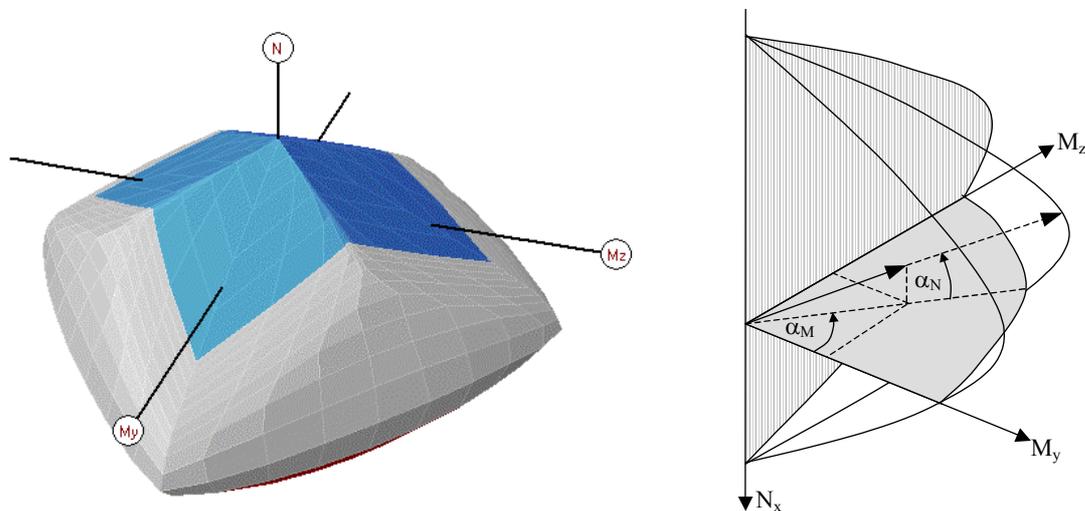


Bild 3.28 Interaktionsdiagramm $N_x / M_y / M_z$, Ausschnitt daraus mit Winkeln α_M und α_N

Ein Vorteil dieser Modellierung in einem Rechenprogramm liegt darin, dass bereits mit einer einzigen Schleife über den Wertebereich der Dehnungskennziffer ein Interaktionsdiagramm für Moment-Normalkraft für eine gegebene Hauptkrümmungsrichtung ermittelt werden kann. Als Nachteil für den allgemeinen Fall ist jedoch auch zu erwähnen, dass die Abbildung der Grenzdehnungszustände mittels der DKZ vor allem für den Bereich des Stahlbetonbaus und dort üblicher Dehnungen entwickelt wurde. Für eine allgemeine

Rechnung mit beliebigen Baustoffen und vor allem höheren Grenzdehnungen können sich Iterationsprobleme ergeben, die jedoch mittels zusätzlicher Abfragen lösbar sind.

Werden im vorliegenden Fall die Werte (DKZ, α_K) iterativ verbessert, so stellt QUAST in [8] eine Iterationsmethode vor, bei der die Werte (γ_E , k_y , k_z) verbessert werden, bis die Bedingung $R - \gamma_E \cdot E = 0$ erfüllt ist. Eine Konvergenz ist sehr zuverlässig gewährleistet. Es muss jedoch an anderer Stelle, z.B. bei der Ermittlung von M-N-Linien, mehr Aufwand betrieben werden.

3.5 Zeitabhängiges Verhalten der Baustoffe

3.5.1 Schwinden des Betons

Mit dem Begriff Schwinden werden ganz allgemein Volumenänderungen des Betons beschrieben, die nicht durch Last- oder Temperatureinwirkung, sondern allein durch Veränderung des Wasserhaushalts verursacht werden. Die Unterteilung erfolgt in Kapillarschwinden (Frühschwinden), Trocknungsschwinden, autogenes Schwinden und Carbonatisierungsschwinden. Zur Berechnung von Schnittgrößen und Verformungen ist jedoch nur die Summe ε_s aus allen Anteilen von Interesse. Eine vorhandene, ungleichmäßige Verteilung der Schwinddehnungen über den Querschnitt wird bei üblichen Bauteilen im Allgemeinen vernachlässigt. Erst bei massigen Bauteilen mit stark unterschiedlichem Schwindverhalten über die Bauteilabmessungen ist eine differenzierte Betrachtung lohnenswert.

Bei einem Betonbauteil mit Bewehrung wird die Verkürzung des Betons um ε_s durch die Bewehrung behindert. Damit bauen sich innere Zwangskräfte auf, bei denen der Beton auf Zug und die Bewehrung auf Druck beansprucht wird. Dieser Sachverhalt lässt sich mittels einer Vordehnung auf den Beton (Zug-Vordehnung, positiv) modellieren und kommt damit ohne Vereinfachungen aus. Sind nur die resultierenden Verkrümmungen für eine Durchbiegungsberechnung von Interesse, nicht jedoch die Längenänderung des Bauteils, dann kann die Vordehnung mit gleichen Ergebnissen für die Verkrümmung auch auf die Bewehrung (Druck, negativ) aufgebracht werden.

Neben der Vorspannung ist das Schwinden ein weiterer Grund dafür, warum nichtlineare Berechnungen nur mit tangentialen Steifigkeiten durchgeführt werden können. Im Fall eines unsymmetrisch bewehrten Querschnitts ergibt sich bereits eine Verkrümmung und eine Vordehnung, ohne dass eine äußere Einwirkung besteht. Bei Rechnung mit Sekantensteifigkeiten ergäbe sich die Ersatzsteifigkeit in diesem Fall zu Null (Bild 3.29).

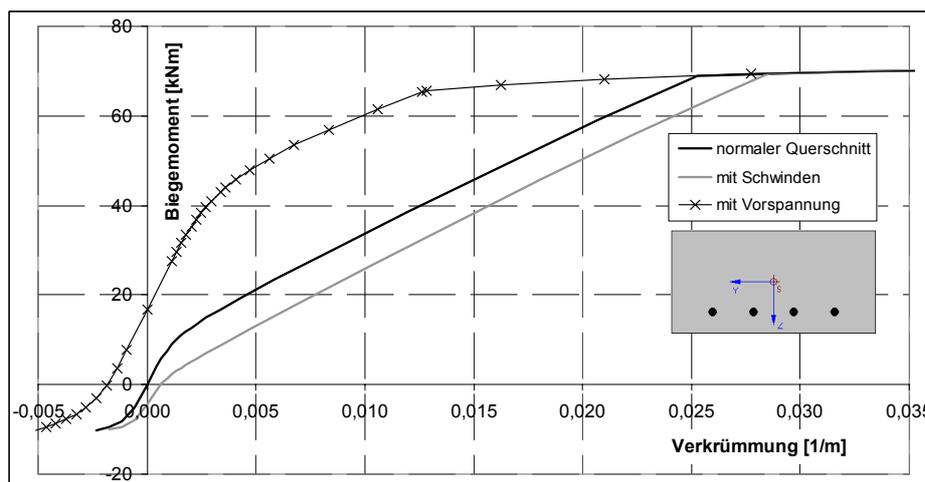


Bild 3.29 Moment-Verkrümmungs-Linien für einseitig bewehrten Querschnitt

3.5.2 Kriechen und Relaxation des Betons

Als Kriechen wird im allgemeinen die bleibende und zeitabhängige Verformung des Betons unter Dauerlast bezeichnet. Auf Querschnittsebene bezeichnet das Kriechen die Zunahme der Dehnungen bei gleichbleibender Spannung. Relaxation ist die Abnahme der Spannung bei gleichbleibender Dehnung. Beide Sachverhalte sind vor allem Folge einer Wasserumlagerung in der Zementmatrix.

Bei Kenntnis der Dehnungen zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie zu einem späteren Zeitpunkt t lässt sich ein Kriechbeiwert φ wie folgt definieren

$$\varphi_t = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{t=0}} - 1. \quad (3.34)$$

Ein Umstellen der Gleichung liefert die Dehnung zum Zeitpunkt t nach folgendem Zusammenhang

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t=0} \cdot (1 + \varphi). \quad (3.35)$$

Dieser Zusammenhang ist nur dann gültig, wenn die Spannung konstant ist und kleiner als $0,4 \cdot f_{ck}$ bis $0,50 \cdot f_{ck}$ ist. Für größere Spannungen steigen die Dehnungen infolge Kriechen überproportional an, welche sich nur über weitere Betrachtungen erfassen lassen.

Die Änderung der Spannung bei gleichbleibender Dehnung infolge Relaxation lässt sich durch Betrachten des Kriechens in Teilschritten mit $\Delta\varphi = \varphi / n$ ermitteln. Für kleine $\Delta\varphi$ kann die neue Spannung nach dem Zeitabschnitt Δt mit

$$\sigma_{t+\Delta t} = \frac{\sigma_t}{1 + \Delta\varphi} \quad (3.36)$$

angegeben werden. Für n Teilschritte ergibt sich damit

$$\sigma_{t=\infty} = \frac{\sigma_{t=0}}{\left(1 + \frac{\varphi}{n}\right)^n} \quad (3.37)$$

Umstellen und Auflösen mittels Binomialkoeffizienten ergibt eine Reihe, die sich beim Übergang für $n \Rightarrow \infty$ zur Taylorreihe zur Berechnung von e^x ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{t=0}}{\sigma_{t=\infty}} &= \left(1 + \frac{\varphi}{n}\right)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{\varphi}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{\varphi}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{\varphi}{n}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{\varphi}{n} \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{\varphi^2}{n^2} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{\varphi^3}{n^3} \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} + \dots \\ &= 1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^2}{n \cdot 2!} + \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^3 \cdot (3n^2 - 2n)}{n^3 \cdot 3!} + \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

Grenzübergang $\lim n \Rightarrow \infty$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{t=0}}{\sigma_{t=\infty}} &= 1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots = e^\varphi \\ \sigma_{t=\infty} &= \sigma_{t=0} \cdot e^{-\varphi} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Problematisch bei der Anwendung dieser Gleichungen zur Vorhersage von Verformungen und Spannungen ist, dass einerseits der Kriechbeiwert φ nur sehr ungenau bestimmt werden kann. Andererseits sind die betrachteten Fälle mit konstanter Spannung im ersten Fall und konstanter Dehnung im zweiten Fall nur Grenzfälle. Im realen, statisch unbestimmten Tragwerk werden Kräfteumlagerungen zwischen dem Beton und der Bewehrung sowie Umlagerungen zwischen einzelnen Tragwerksteilen stattfinden, so dass sich sowohl Dehnung als auch Spannung ändern.

Einfache Berücksichtigung durch Strecken der Spannungs-Dehnungs-Linie mit dem Faktor $(1 + \varphi)$

Als für baupraktische Belange ausreichend genaue Lösung haben QUAST und weitere vorgeschlagen, die Spannungs-Dehnungs-Linie mit dem Faktor $(1 + \varphi)$ in Richtung der x-Achse (Dehnung) zu strecken. Bei konstanter Spannung im Beton liefert dieser Vorschlag die exakten Ergebnisse. Die Verringerung der Spannung infolge Relaxation kann allerdings relativ schlecht abgebildet werden.

Da sich für normale Stahlbetonquerschnitte infolge Kriechen des Betons sowohl Dehnung als auch Spannung ändern werden, stellt der Vorschlag in jedem Fall nur eine Näherung dar. Andererseits ist eine Rechnung mit gestreckter Spannungs-Dehnungs-Linie sehr einfach und erfordert keine weiteren Anpassungen der Rechenalgorithmen.

Genauere Rechnung in n Zeitschritten mit jeweils $\Delta\varphi = \varphi / n$

Eine genauere Berücksichtigung des Kriechens ist damit nur in Zeitschritten möglich und erfordert einen höheren Aufwand in der Formulierung der Algorithmen. Zur genauen Abbildung der Kriechvorgänge ist weiterhin eine Unterteilung des Querschnitts in Lamellen oder bei zweiachsiger Biegung in kleine Elemente notwendig. Damit kann für jeden Punkt des Querschnitts der elastische und der plastische Anteil der Dehnungen ermittelt sowie der Belastungsbeginn korrekt erfasst werden.

Vereinfachend kann für den nicht weiter unterteilten Querschnitt jeweils eine Vorkrümmung und Vordehnung bestimmt werden, welche dem nicht reversiblen Anteil der Dehnungen entspricht. Eine Berechnung kann damit näherungsweise wie folgt ablaufen:

- Rechnung 1 mit Materialgesetz für $t_0 = 0$
- Rechnung 2 mit Materialgesetz für t_1 , Strecken der Spannungs-Dehnungs-Linie mit dem Faktor $(1+\Delta\varphi)$
- Aufbringen einer Vordehnung und Vorkrümmung auf den Betonquerschnitt, so dass sich bei Rechnung mit Materialgesetz für $t_0 = 0$ der gleiche Dehnungszustand wie bei Rechnung 2 ergibt.
- n-maliges Wiederholen dieser Schritte

Die Genauigkeit der vorgestellten einfachen Rechenweise in Zeitschritten steigt mit kleiner werdendem Wert für $\Delta\varphi$, da die Rechnung mit der um $(1+\Delta\varphi)$ gestreckten Spannungs-Dehnungs-Linie nur eine Näherung darstellt. Weiterhin ist auch die Benutzung der Vordehnung und Vorverkrümmung für den gesamten Querschnitt ebenfalls eine Näherung. Durch die beschriebene Vorgehensweise treten in der Rechnung in der eigentlichen Zugzone kleine Druckspannungen nahe der Dehnungsnulllinie auf. Der Fehler ist jedoch sehr gering, da die Spannungen und auch der Hebelarm sehr klein sind. Die Werte für Vordehnung und Vorverkrümmung können ohne Iteration ermittelt werden, so dass der Aufwand für eine derartige Rechnung noch sehr gering ist.

Beispiel: Spannungsumlagerung infolge Kriechen bei Normalkraftbeanspruchung

Je nach Bewehrungsverhältnis und Umlagerungsmöglichkeiten im System bestehen mehr oder minder große Unterschiede zwischen einer einfachen Rechnung mit Strecken der Spannungs-Dehnungs-Linie mit $(1 + \varphi)$ und einer aufwändigeren Rechnung in Zeitschritten. Beispielhaft sind in Bild 3.30 und 3.31 die Unterschiede für einen Stützenquerschnitt R 60x30 gezeigt, welcher nur durch eine konstante Normalkraft N_x belastet wird, so dass

die Spannung im Beton bei $t = 0$ jeweils $\sigma_c = -13,5 \text{ N/mm}^2 = 0,45 \cdot f_{ck}$ beträgt. Umlagerungen finden damit nur vom Beton auf die Bewehrung statt.

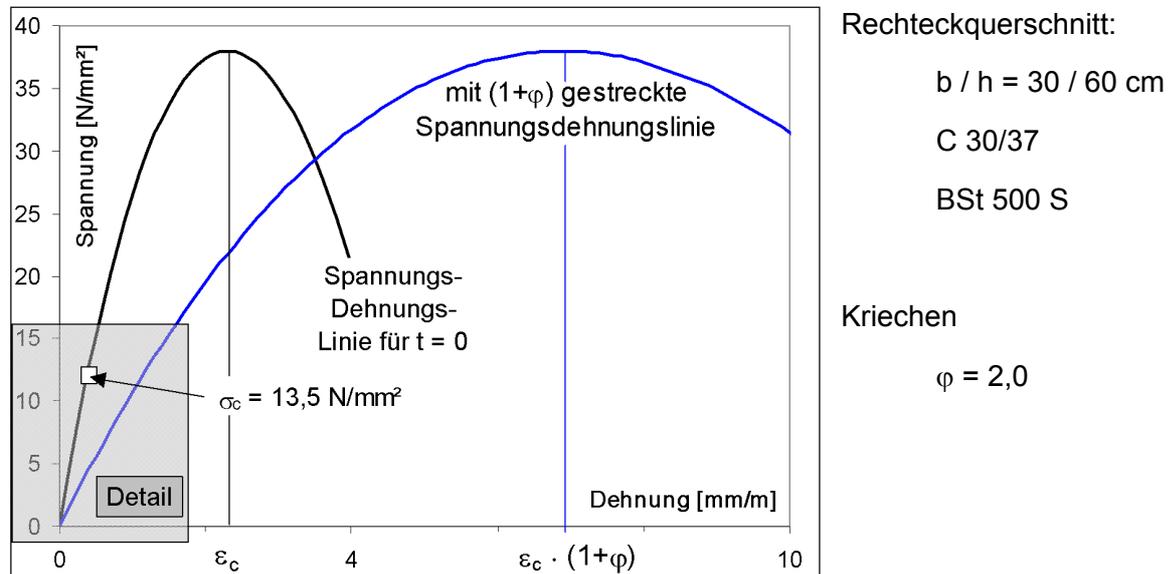


Bild 3.30 Normale und mit $(1 + \varphi)$ gestreckte Spannungs-Dehnungs-Linie, Ergebnisse der Rechnung im Detail in Bild 3.31

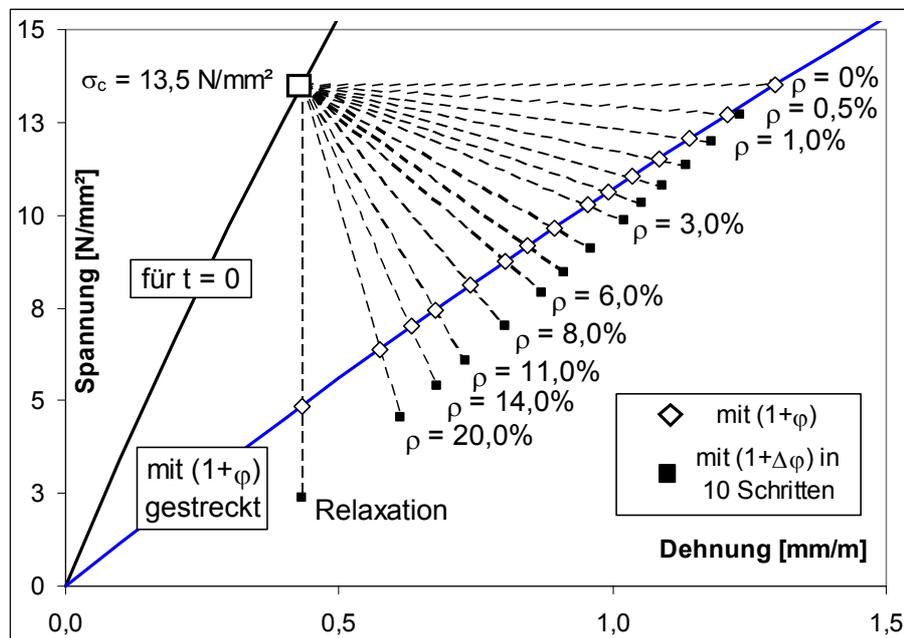


Bild 3.31 Unterschiede zwischen einfacher Rechnung mit Strecken der Spannungs-Dehnungs-Linie mit $(1 + \varphi)$ und Rechnung in Zeitschritten (hier $n = 10$) für verschiedene Bewehrungsverhältnisse ρ

Die relativen Unterschiede zwischen den beiden Berechnungen sind in Bild 3.32 zusammengefasst, wobei neben dem Querschnitt aus C 30/37 der gleiche mit dem Beton C 50/60 gerechnet wurde. Unter der Voraussetzung, dass die Rechnung in 10 Zeitschritten in etwa das richtige Ergebnis widerspiegelt, können die Abweichungen der einfachen Rechnung ermittelt werden. Wie man sieht, werden die resultierende Dehnung und damit auch die Stahlspannungen um maximal 8% zu klein berechnet. Die große Abweichung der Betonspannungen von bis zu 40% vor allem bei großen Bewehrungsverhältnissen resultiert aus den kleinen Werten der Betonspannung nach der Umlagerung. Damit ergeben Unterschiede von nur $\Delta\sigma = 1,5 \text{ N/mm}^2$ bereits eine relative Abweichung von 30%. In der Summe sind die Abweichungen im baupraktischen Bereich (bis ca. $\rho = 4\%$) mit ca. 7% noch im akzeptablen Bereich.

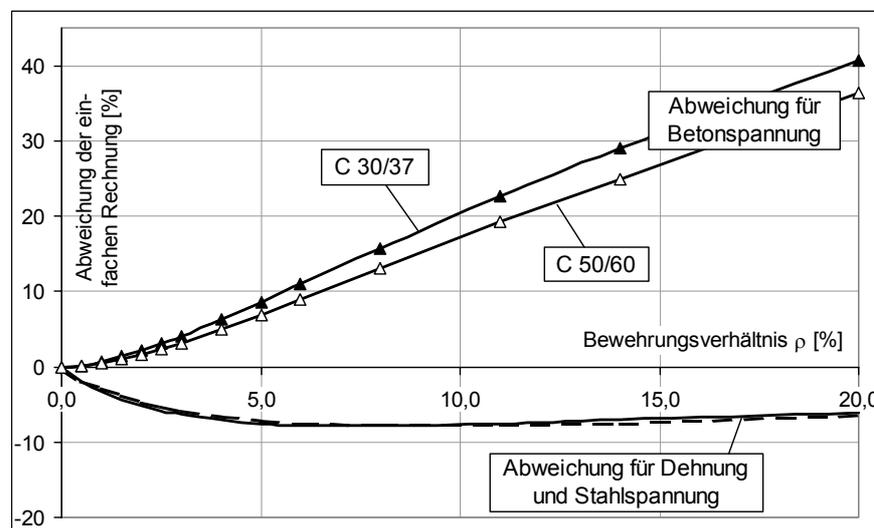


Bild 3.32 Abweichungen der einfachen Rechnung mit $(1+\varphi)$ im Vergleich zur Rechnung mit 10 Zeitschritten

Beispiel: Spannungumlagerung infolge Kriechen beim Balken unter Biegebeanspruchung

Für einen Balken unter Biegebeanspruchung ergibt sich neben der Umlagerung der Betonspannungen auf die Bewehrung auch eine Änderung des inneren Hebelarms. Bei gleichem Biegemoment wird dieser meist kleiner, so dass die Stahlspannungen in der Zugbewehrung größer werden und die Verkrümmung ebenfalls zunimmt. Um einen Eindruck von den Umlagerungen zu erhalten, sind in Bild 3.33 die Ergebnisse für einen Rechteckquerschnitt für ein konstantes Moment aufgeführt.

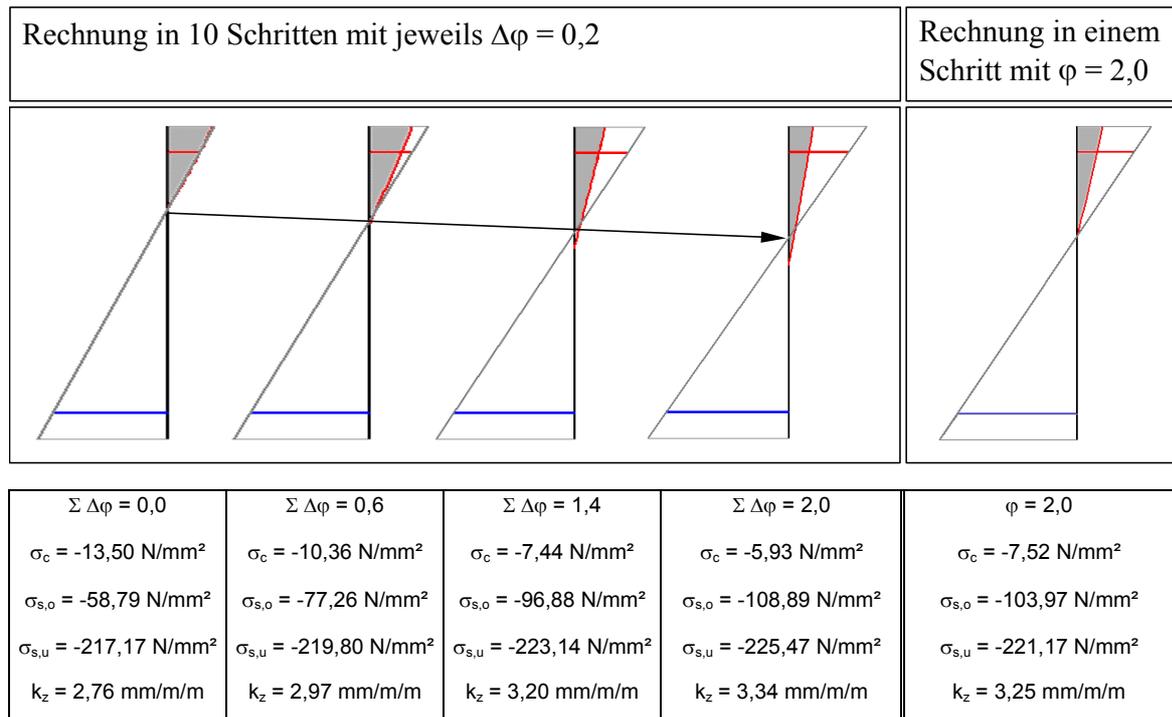


Bild 3.33 Spannungs- und Dehnungsverteilungen für einen Rechteckquerschnitt R2 ($b / h / d_{1,2} = 30 / 60 / 5 \text{ cm}$, C 30/37 m, BSt 500, $A_{s,tot} = 39,27 \text{ cm}^2$) unter Dauerbeanspruchung $M_y = 2212,14 \text{ kNm}$, Berücksichtigung des Kriechens in 10 Zeitschritten (links) und in einem Zeitschritt (rechts)

Wie beim vorherigen Beispiel des zentrisch gedrückten Stützenquerschnitts auch, lagern sich die Druckspannungen des Betons auf die Druckbewehrung um. Die Unterschiede zwischen der einfachen Rechnung und der etwas genaueren Rechnung in 10 Zeitschritten sind, die Dehnungen und Verkrümmungen betreffend, mit max. 4,1% sehr klein. Die Stahlspannungen können ebenfalls gut berechnet werden, nur die Größe der Betonspannungen werden wie zuvor auch bei der einfachen Rechnung überschätzt.

Die Ergebnisse einer Rechnung mit 20 Schritten ($\Delta\varphi = 0,1$) weichen nur unwesentlich von den gezeigten Ergebnissen mit 10 Schritten ab.

Zusammenfassung: Kriechen im Druckbereich des Betons

Wie anhand zweier Beispiele gezeigt wurde, bewegen sich die relevanten Abweichungen (Verformungen) zwischen der einfachen und einer etwas genaueren Rechnung bei ca. 10%. Zwar mögen weitere Vergleichsrechnungen an anderen Querschnitten und Parametern noch größere Unterschiede liefern, der größte Fehler bzw. die größte Unsicherheit bleibt jedoch die Bestimmung des Kriechbeiwertes φ . Bei einer Schwankungsbreite von $\pm 30\%$ und mehr wird auf eine genauere Erfassung des Kriechvorgangs für baupraktische Belange verzichtet.

Aus diesem Grund wird in den durchgeführten Rechnungen das einfache Modell mit dem Strecken der Spannungs-Dehnungs-Linie mit dem Faktor $(1+\varphi)$ benutzt, so dass das Kriechen näherungsweise erfasst werden kann.

Einfluss einer Dauerbelastung auf die versteifende Mitwirkung des Betons

Generell werden sich auch bei Zugspannungen die Dehnungen infolge des Kriechens erhöhen. Einen größeren Einfluss auf die Verformungen hat die Verringerung der Zugfestigkeit unter Dauerlast, so dass vorhandene Risse größer werden oder neue Risse entstehen. Als weiterer Aspekt sind vorübergehende höhere Verkehrslasten auf dem Tragwerk zu beachten, die ebenfalls zusätzliche oder größere Risse produzieren und damit die Zugzone weiter schädigen.

Die Abbildung der Betonzugzone für die Rechnung sollte wie für Kurzzeitbeanspruchungen auch eine gute Näherung der Realität darstellen, aber auch einfach in der Modellierung sein und eine gute Konvergenz im Iterationsprozess gewährleisten. Um zu erreichen, dass der E-Modul sowohl im Zug- als auch im Druckbereich bei kleinen Dehnungen identisch ist, erfolgt das Strecken der Spannungs-Dehnungs-Linie nicht nur auf der Druckseite, sondern auch auf der Zugseite mit $(1+\varphi)$. Um weiterhin den Übergang zwischen dem ungerissenen und dem gerissenen Bereich ohne abrupte Änderungen der Steifigkeit zu modellieren, wird der Wert ε_{cr} für den Beginn der Abminderung mit dem Faktor VMB ebenfalls mit $(1+\varphi)$ multipliziert. Zur Berücksichtigung der kleineren Dauerzugfestigkeit und temporärer Verkehrslasten sollte als weitere Anpassung die Zugfestigkeit f_{ct} verringert werden. Der Wert für ε_{cr} muss dabei ebenfalls um das gleiche Verhältnis verringert werden, um im Ursprung den E-Modul konstant zu halten.

Den eigenen Erfahrungen zufolge lassen sich mit Abminderungen auf 50% bis 70% der ursprünglichen Zugfestigkeit für $t = \infty$ gute Ergebnisse erzielen.

3.5.3 Kriechen und Relaxation der Bewehrung

Übliche Baustähle zeigen bei normaler Temperatur sowie Spannungen unterhalb der Streckgrenze keine nennenswerten Kriechverformungen. Nur bei hochfesten Spannstählen mit entsprechend hohem Ausnutzungsgrad im Gebrauchszustand können auch bei Normaltemperatur deutliche Dehnungszuwächse auftreten. Anhaltswerte zur Relaxation von hochfesten Drähten, Stäben und Litzen gibt der EC2 bzw. die DIN 1045-1. Die Modellierung in einem Programm zur Querschnittsberechnung erfolgt zweckmäßigerweise über die Verringerung der Vorspannung um den ermittelten Betrag.

3.6 Wechselbeanspruchungen, Rückverformungen

Die Auswirkungen von Entlastungen auf den Gebrauchszustand hat unter anderem KEYSBERG in [9] beschrieben und eine Methode zur rechnerischen Berücksichtigung von Wechselbeanspruchungen vorgestellt. Frühere Modelle stammen unter anderem von TENNSTEDT (1974), von KORDINA, ROSTASY, SVENSVIK (1982) oder von STANGENBERG (1973).

In den eigenen Untersuchungen wird darauf verzichtet, Wechselbeanspruchungen genauer zu erfassen, da einerseits eine genaue Lastgeschichte für ein Tragwerk schwer zu ermitteln ist und andererseits die Berücksichtigung eine umfangreiche Erweiterung der Rechenalgorithmen nach sich zieht.

Da eine vorherige höhere Belastung und anschließende Entlastung im Gebrauchszustand vor allem die Zugzone schädigt, wird zur Berücksichtigung derartiger Einflüsse die Zugfestigkeit abgemindert. Dies wurde in Kapitel 3.5.2 beim Einfluss des Kriechens bereits aufgeführt.

3.7 Literaturverweise

- [1] *Busjaeger, D., Quast, U.*: Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft. DAfStb, Heft 415.
- [2] *Quast, U.*: Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10/1981, S. 247 – 250.
- [3] *Espion, B.*: Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures plane. Thèse de Doctorat. Université Libre de Bruxelles, 1985.
- [4] *Ozbolt, J., Mayer, U.*: Nichtlineare Berechnung von Stabtragwerken aus Stahl- und spannbeton unter Berücksichtigung von Zeiteinflüssen. Bauingenieur, Heft 11/1997.
- [5] *Wai-Fah Chen, Lian Duan*: Bridge Engineering Handbook, Chapter 36.5.2 Modeling and Solution Procedures. (c) 2000 by CRC Press, Boca Raton London New York Washington, D.C.
- [6] *Allgöwer, G.*: Bemessung von Stahlbetondruckgliedern unter zweiachsiger Biegung mit Interaktionsdiagrammen nach Theorie II. Ordnung. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2001.
- [7] *Bathe, K.-J.*: Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Paris Tokyo Hong Kong 1990.
- [8] *Quast, U.*: Elementare Stahlbetonberechnungen mit Euler, Gauß und Broyden. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10/2002.

-
- [9] *Keysberg, J.*: Zur Auswirkung von Entlastungen auf den Gebrauchszustand biegebeanspruchter Stahlbetontragwerke. Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 1999.

